Devoir Maison n°2

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 3 novembre 2015

Exercice 1

On cherche dans cet exercice à trouver une belle formule pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)(k+5)}$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{k(k+2)(k+5)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+2} + \dfrac{c}{k+5}$.
2. En déduire la valeur de la somme demandée.
3. Redémontrer la formule précédente par récurrence.

Exercice 2

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une fonction f_n par $f_n(x) = \sqrt{x}(\ln(x))^n$, et on note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative.

1. Étudier le plus complètement possible les fonctions f_n (limites, variations, asymptotes, tangentes remarquables).
2. Étudier les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$, puis $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+2}$.
3. Tracer dans un même repère une allure soignée des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.
4. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution supérieure ou égale à 1, que l'on notera α_n. Justifier que $\alpha_n \in [1, e]$.
5. Montrer que la suite (α_n) est croissante, et déterminer sa limite.

Exercice 3

On s'intéresse dans cet exercice à la fonction g définie par $g(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

1. Déterminer rigoureusement le domaine de définition de g.
2. Étudier la parité de g.
3. Calculer la dérivée g' de la fonction g (en précisant sur quel ensemble g est dérivable), et simplifier son expression en discutant suivant la valeur de x.
4. Donner une expression simplifiée de $g(x)$ sur $[0, 1]$, puis une autre sur $[1, +\infty[$.
5. Retrouver l'expression simplifiée de $g(x)$ sur $[0, 1]$ à l'aide d'un calcul trigonométrique direct.
6. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
7. Tracer une allure de la courbe représentative de g.
8. On s'intéresse maintenant à l'équation $g(x) = \arccos(x)$.
   (a) Montrer qu'elle admet une unique solution β sur l'intervalle $]0, 1[$.
   (b) Simplifier $\cos(2\arctan(x))$ lorsque x est un réel quelconque.
   (c) Montrer que $\beta^3 + \beta^2 + \beta = 1$.