Devoir Maison n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

22 septembre 2015

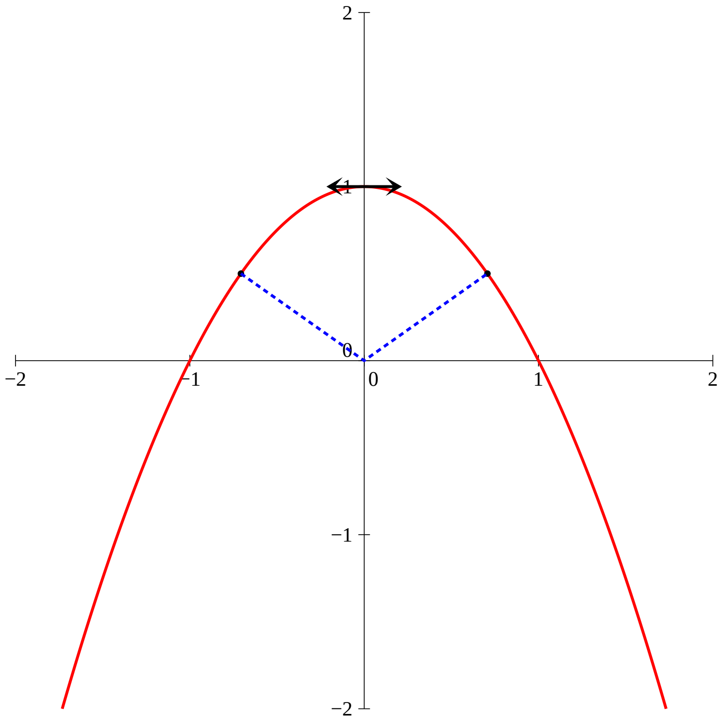
Exercice 1

Première partie.

1. La distance entre les deux points est donnée par $f(x) = \sqrt{x^2 + (1 - x^2)^2} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$. On peut effectuer un changement de variable $X = x^2$ puis calculer le discriminant de ce qui se trouve sous la racine carrée pour constater que c'est toujours positif, mais c'est en fait inutile, la distance OM_x est bien entendue définie pour tout réel x (ou, si on préfère, ce qu'on a mis sous la racine carrée est nécessairement positif comme somme de deux carrés), donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. On constate aisément que $f(-x) = \sqrt{(-x)^4 - (-x)^2 + 1} = f(x)$, donc f est paire, et sa courbe représentative sera donc symétrique par rapport à (Oy). On pourra également se permettre de n'effectuer l'étude de la fonction que sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
3. La fonction étant paire, il y a en fait une seule limite à calculer. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 - x^2 + 1 = +\infty$, on obtient immédiatement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. En invoquant la parité, on peut alors affirmer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
4. La racine carrée étant une fonction croissante sur son domaine de définition, les variations de f sont les mêmes que celles de $h : x \mapsto x^4 - x^2 + 1$. Cette fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $h'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$. Elle s'annule en particulier pour $x = 0$, $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Pour compléter le tableau de variations, on calcule $h(0) = 1 = f(0)$, et $h\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{4}$, donc $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On peut alors dresser le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. La courbe $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 1 - x^2$, il s'agit d'une parabole, la fonction est croissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$, et elle admet pour maximum $f(0) = 1$. Les points correspondant aux valeurs minimales de f ont pour abscisse $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et pour ordonnée $1 - -\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Voici le tracé demandé :



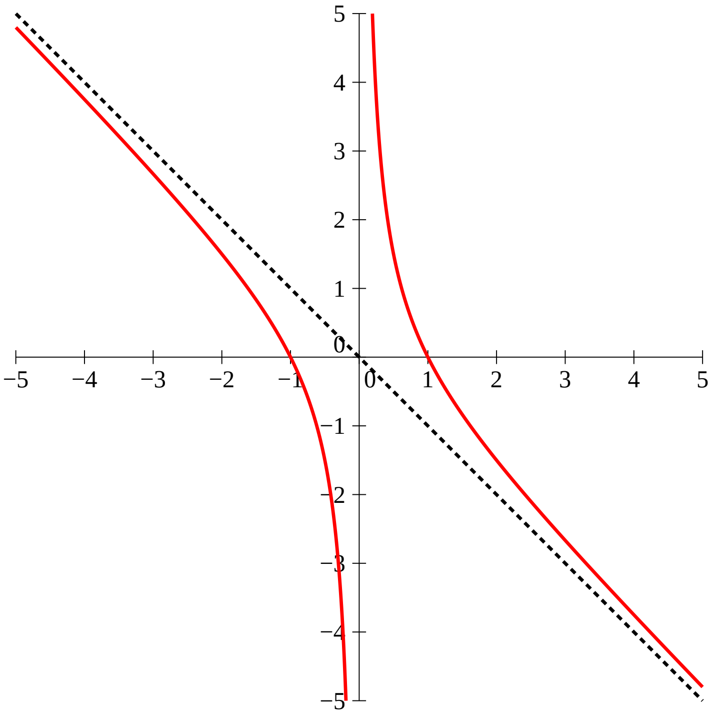
Deuxième partie.

1. Pour obtenir le coefficient directeur d'une droite passant par l'origine et par un point A, il suffit de diviser l'ordonnée du point A par son abscisse. Ici, on obtient donc $g(x) = \dfrac{1-x^2}{x}$. Cette fonction est définie sur $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$, et elle est impaire (calcul immédiat).
2. Puisque la fonction est impaire, on ne fera les calculs que sur $]0, +\infty[$. Commençons par les limites : $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée), et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ (quotient des termes de plus haut degré). On calcule donc $\dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{1-x^2}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} - 1$, et on constate que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = -1$. On enchaine alors avec le calcul de $g(x) + x = \dfrac{1-x^2+x^2}{x} = \dfrac{1}{x}$, ce qui prouve que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) + x = 0$. Autrement dit, la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à la courbe représentative de g en $+\infty$ (on pouvait aussi s'en rendre compte en écrivant immédiatement $g(x) = -x + \dfrac{1}{x}$). Par symétrie de la courbe par rapport à l'origine, la droite d'équation $y = -x$ sera aussi asymptote oblique en $-\infty$.
3. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et $g'(x) = \dfrac{-2x^2 - (1-x^2)}{x^2} = \dfrac{-x^2-1}{x^2} < 0$. La fonction g est donc strictement décroissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g	$+\infty \searrow -\infty$	$\Vert$	$+\infty \searrow -\infty$

4. Il faut pour cela étudier le signe de $g(x) + x = \dfrac{1}{x}$. C'est très facile : la courbe est en-dessous de l'asymptote sur $]-\infty, 0[$, et au-dessus sur $]0, +\infty[$.

5. Il n'y a pas grand chose d'intéressant à placer, on peut toujours ajouter que la fonction s'annule pour $x = \pm 1$:



6. Il faut chercher le nombre de solutions de l'équation $\dfrac{1-x^2}{x} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$. Cette dernière ne pourra pas avoir de solutions sur $]-1, 0[$ ou sur $]1, +\infty[$ car il faut que le membre de gauche de l'équation soit positif. On peut alors élever au carré pour obtenir l'équation équivalente $(1-x^2)^2 = x^2(x^4-x^2+1)$, soit $1-2x^2+x^4 = x^6-x^4+x^2$, ou encore $x^6-2x^4+3x^2-1 = 0$. En effectuant le changement de variable $X = x^2$, ramenons-nous à l'étude de la fonction $z : x \mapsto X^3-2X^2+3X-1$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $z'(X) = 3X^2-4X+3$. Cette dérivée a pour discriminant $\Delta = 16-36 < 0$, elle est toujours positive, et la fonction Z est donc strictement croissante. Elle effetcue alors une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et en particulier s'annule exactement une fois. Comme $z(-1) = -1-2-3-1 < 0$, $z(0)-1 < 0$ et $z(1) = 1-2+3-1 > 0$, la valeur d'annulation X_0 de z est située dans l'intervalle $]0, 1[$. Parmi les deux valeurs de x correspondantes $\sqrt{X_0}$ et $-\sqrt{X_0}$, l'une des deux est à exclure car elle se situe dans l'intervalle $]-1, 0[$. Il y a donc exactement une solution à l'équation $g(x) = f(x)$, et elle se situe dans l'intervalle $]0, 1[$.

Exercice 2

1. Il y a essentiellement deux méthodes possibles : soit on utilise des éléments, soit on fait un calcul formel. Commençons par utiliser des éléments. Si $x \in (A \cup B)\backslash C$, cela signifie que x appartient à A ou à B, mais pas à C. S'il appartient à A, c'est donc un élément de $A\backslash C$, et de même il sera dans $B\backslash C$ s'il appartient à B. Dans tous les cas, $x \in (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$. La réciproque est encore plus évidente.

   Par un calcul plus brutal : $(A\cup B)\backslash C = (A\cup B)\cap\overline{C} = (A\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{C}) = (A\backslash C)\cup(B\cap\backslash C)$.
2. Le plus simple est de faire un calcul formel : $C\backslash(A \cup B) = C \cap (\overline{A \cup B}) = C \cap (\overline{A} \cap \overline{B})$ d'après les lois de Morgan. Rajouter une deuxième fois l'ensemble C à l'intersetion ne change rien (les éléments de C et de $C \cap C$ sont les mêmes), on peut donc écrire $C\backslash(A \cup B) = (C \cap \overline{A}) \cap (C \cap \overline{B}) = (C\backslash A) \cap (C\backslash B)$.

3. Un petit dessin permet de se convaincre que les deux expressions correspondent effectivement au même ensemble. Pour une démonstration rigoureuse, le plus simple est de procéder par double inclusion. Considérons donc un élément x appartenant à $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. On a donc deux possibilités : soit $x \in A$ et $x \notin B$; soit $x \in B$ et $x \notin A$. Dans les deux cas, x appartient à l'un des deux ensembles A ou B, donc $x \in A \cup B$, mais on sait aussi que x n'appartient pas à l'un des deux ensembles, donc il ne peut pas appartenir à leur intersection. Autrement dit, $x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$, et on a prouvé que $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) \subset (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Faisons maintenant le raisonnement en sens inverse, en considérant un élément $y \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Comme $y \in A \cup B$, on a soit $y \in A$, soit $y \in B$. Dans le permier cas, y ne peut pas appartenir à B car il n'est pas dans $A \cap B$, donc $y \in A \backslash B$. De même, dans le deuxième cas, $y \in B \backslash A$. Dans tous les cas, $y \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$, ce qui prouve la deuxième inclusion. On a donc bien $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

   Autre méthode, purement calculatoire, en utilisant le fait que $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.
   On a donc $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})$. Or, $A \cup \overline{A} = \overline{B} \cup B = E$, on peut enlever ces deux ensembles de notre intersection ; et via les lois de Morgan, $\overline{B} \cup \overline{A} = \overline{B \cap A}$. Finalement, $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

4. Essayons donc d'écrire, à défaut de plus simplement, plus élémentairement, le membre de gauche : $(A \Delta B) \Delta C = ((A \Delta B) \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A \Delta B})$ (en utilisant la définition et en écrivant des intersections avec les complémentaires plutôt que des différences d'ensembles). On peut développer tout ça pour obtenir $(((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) \cap \overline{C}) \cup (C \cap (\overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{B \cap \overline{A}})) = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (C \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}))$. Dans le développement de la toute dernière parenthèse, on peut enlever le $\overline{A} \cap A$ et le $B \cap \overline{B}$ pour obtenir enfin ceci : $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$. Vous allez me dire, s'il faut recommencer un même calcul pour le membre de droite de l'égalité qu'on essaye de prouver, on est pas encore sortis de l'auberge. En fait, inutile, le membre de droite peut aussi s'écrire $(B \Delta C) \Delta A$ (la commutativité est évidente au vu de la définition), c'est-à-dire que par rapport au calcul que nous venons de faire, on remplace A par B, B par C et C par A. Faites-le dans l'expression obtenue à la fin, vous verrez qu'elle reste identique, seul l'ordre des quatre ensembles de la réunion étant changé. Ouf, l'égalité est donc vraie !

5. Faisons un simple calcul ensembliste : $A \cap (B \Delta C) = A \cap ((B \backslash C) \cup (C \backslash B)) = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B})$. Or, $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = ((A \cap B) \backslash (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \backslash (A \cap B)) = (A \cap B \cap \overline{A \cap C}) \cup (A \cap C \cap \overline{A \cap B}) = (A \cap B \cap (\overline{A} \cup \overline{C})) \cup (A \cap C \cap (\overline{A} \cup \overline{B}))$. On a utilisé les lois de Morgan pour la dernière égalité. On peut maintenant oublier dans chaque parenthèse le $\overline{A}$, puisque son intersection avec $A \cap B$ ou $A \cap C$ sera de toute façon vide. Il reste alors $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B})$, ce qui est bien la même chose que ce qu'on avait obtenu plus haut. L'égalité est donc vérifiée.

6. En utilisant les lois de Morgan deux fois de suite, on peut écrire $\overline{A \Delta B} = \overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = \overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{B \cap \overline{A}} = (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{B} \cup A) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ (les deux autres termes étant vides, on peut les oublier). De même, $A \Delta \overline{B} = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cup \overline{B})$ (là c'est direct en écrivant les complétaires sous forme d'intersection), et symétriquement pour $B \Delta \overline{A}$. Les trois expressions sont bien égales.

7. Prenons la deuxième expression de la différence symétrique : si $A \Delta B = \emptyset$, alors $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = \emptyset$. Cela ne peut se produire que si $A \cup B = A \cap B$ (il faut enlever tout le monde pour ne plus rien avoir au final). Or, quel que soit l'ensemble B, on a toujours $A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset A$. Il faut donc avoir simultanément $A \cap B = A = A \cup B$ pour que $A \cup B$ et $A \cap B$ soient égaux. Dire que $A \cup B = A$ signifie qu'on n'ajoute personne en faisant l'union avec B, autrement dit que $B \subset A$. Au contraire, dire que $A = A \cap B$ signifie que tous les éléments de A appartiennent aussi à B (puisqu'ils sont dans $A \cap B$), donc que $A \subset B$. Conclusion, on a nécessairement $A \subset B$ et $B \subset A = A$. Le seul ensemble vérifiant $A \Delta B = \emptyset$ est donc l'ensemble A lui-même.

8. Même méthode : on a $(A \cup B)\backslash(A \cap B) = E$, donc on doit avoir $A \cup B = E$ (sinon on n'obtiendra pas tout le monde en enlevant les éléments de $A \cap B$) et $A \cap B = \emptyset$. Autrement dit, A et B sont disjoints et ont pour union l'ensemble E, ce n'est possible que si $B = \overline{A}$.
9. On doit avoir cette fois-ci $A\Delta B = X$, A et X étant fixés, c'est-à-dire $(A \cup B)\backslash(A \cap B) = X$. En particulier, $A \cup B$ doit inclure X, c'est-à-dire que $X \subset A \cup B$, ou encore $X\backslash A \subset B$ (tous les éléments qui sont dans X et ne sont pas dans A doivent nécessairement appartenir à B pour être dans $A \cup B$). De même, on aura $A\backslash X \subset B$. En utilisant les deux dernières inclusions obtenues, on a donc $A\Delta X \subset B$. Prenons désormais un élément dans B. S'il appartient aussi à A, alors il appartient à $A \cap B$, donc pas à X. Au contraire, s'il n'appartient pas à A, il appartient à $A \cup B$ (puisqu'il est dans B), mais pas à $A \cap B$, donc il est dans X. Autrement dit, il appartient soit à $A\backslash X$, soit à $X\backslash A$, et dans tous les cas à $A\Delta X$ qui est l'union de ces deux ensembles. Conclusion, $B \subset A\Delta X$, ce qui combiné au résultat obtenu précédemment, nous donne nécessairement $B = A\Delta X$. On vérifie facilement que cet ensemble B convient effectivement.