Devoir Maison n°1

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 22 septembre 2015

Exercice 1

On note dans tout cet exercice M_x le point du plan de coordonnées $(x, 1 - x^2)$, et $\mathcal{C}$ la courbe constituée par tous les points M_x, lorsque x parcourt $\mathbb{R}$ (autrement dit, $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 1 - x^2$).

Première partie.

Dans cette première partie, on s'intéresse à la fonction f définie par $f(x) = OM_x$ (distance entre l'origine O du repère et le point M_x défini précédemment).

1. Donner une formule explicite pour $f(x)$, et préciser son domaine de définition.
2. Étudier la parité de la fonction f. Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
4. Étudier les variations de f, et dresser un tableau de variations complet de la fonction f.
5. Tracer la courbe $\mathcal{C}$, en plaçant les points correspondant aux extrema de la fonction f (on ne demande pas le tracé de la courbe représentative de f).

Deuxième partie.

On va désormais étudier la fonction g définie de la façon suivante : $g(x)$ est le coefficient directeur de la droite OM_x.

1. Donner une expression explicite de g, préciser son domaine de définition et étudier sa parité.
2. Déterminer les limites de g aux bornes de son domaine de définition, et étudier la présence éventuelle d'asymptotes à sa courbe représentative.
3. Étudier les variations de g et dresser un tableau de variations complet.
4. Déterminer la position relative de la courbe représentative de la fonction g et de son asymptote oblique.
5. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction g.
6. Combien existe-t-il de réels x pour lesquels $g(x) = f(x)$ (on ne demande pas la valeur précise des éventuelles solutions) ?

Exercice 2

Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E. On note $B\backslash A$ le complémentaire de A dans B (autrement dit, $B\backslash A = B \cap \overline{A}$). On appellera ensuite **différence symétrique** des ensembles A et B l'ensemble noté $A\Delta B$ et défini par $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

Il est tout à fait autorisé (et même conseillé) d'illustrer vos raisonnements par des schémas, même si ceux-ci ne contituent pas une preuve en tant que telle.

1. Montrer que $(A \cup B)\backslash C = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$.
2. Exprimer $C\backslash(A \cup B)$ en fonction de $C\backslash A$ et de $C\backslash B$ (en justifiant).
3. Montrer qu'on a également $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.
4. Montrer que la différence symétrique est associative (c'est-à-dire que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$).
5. Montrer que, si A, B et C sont trois sous-ensembles de E, $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.
6. Montrer que $\overline{A\Delta B} = A\Delta\overline{B} = \overline{A}\Delta B$.
7. Montrer que, l'ensemble A étant fixé, il existe un unique ensemble B tel que $A\Delta B = \emptyset$.
8. Montrer de même qu'il existe un unique B tel que $A\Delta B = E$.
9. Plus généralement, montrer que, quel que soit le sous-ensemble X de E, il existe un unique B tel que $A\Delta B = X$.