# TD n°10 : corrigé

PTSI A et B Lycée Eiffel

12 mai 2016

## Exercice 1

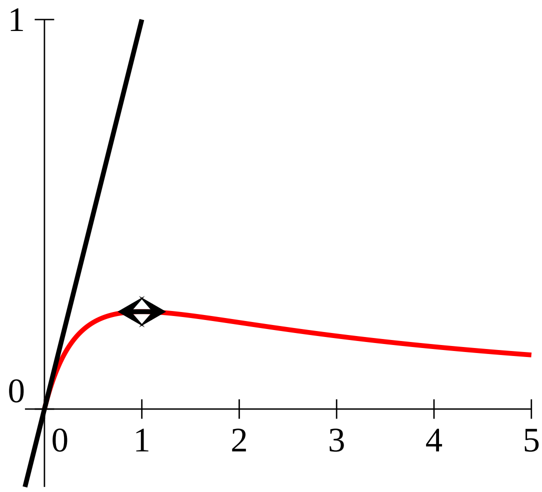
1. (a) La fonction $f$ est dérivable comme quotient de fonctions usuelles, et $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{x+1-2x}{(x+1)^3} = \dfrac{1-x}{(x+1)^3}$. L'étude du signe ne pose bien sûr aucun problème : le dénominateur est positif sur notre intervalle d'étude, et le numérateur change de signe pour $x = 1$. La dérivée $f'$ est donc positive sur $[0, 1]$ et négative sur $[1, +\infty[$.

   (b) On peut par exemple écrire $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{x^2} \sim \dfrac{1}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   (c) On sait que $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x)$, donc $\dfrac{1}{(1+x)^2} = (1 - x + o(x))^2 = 1 - 2x + o(x)$, puis $f(x) = x - 2x^2 + o(x^2)$ (inutile de pousser le premier développement limité plus loin que l'ordre 1 puisqu'on va multiplier par $x$ ensuite).

   (d) Puisque la fonction $f$ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, une équation de sa tangente est obtenue en prenant la partie de ce développement limité, soit $y = x$. De plus, $f(x) - x = -2x^2 + o(x^2) \sim -2x^2 \leqslant 0$, ce qui permet d'affirmer que $f(x) - x \leqslant 0$ sur un voisinage de 0. Autrement dit, la courbe de $f$ est en-dessous de sa tangente au voisinage de 0.

   (e) Le seul calcul supplémentaire nécessaire est celui de $f(1) = \dfrac{1}{4}$. On obtient l'allure de courbe suivante :




2. (a) On a déjà calculé plus haut $u_1 = f(1) = \dfrac{1}{4}$. Reste $u_2 = f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{\frac{1}{4}}{(\frac{5}{4})^2} = \dfrac{4}{25}$.

(b) On peut bien sûr procéder par récurrence. Notons $P_n$ la propriété : $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n}$. La propriété $P_1$ est manifestement vraie. Supposons désormais $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n}$. La fonction $f$ étant croissante sur l'intervalle $[0,1]$, et donc sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, on en déduit que $f(0) < f(u_n) \leqslant f\left(\frac{1}{n}\right)$. Or $f(0) = 0$, et $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{(\frac{n+1}{n})^2} = \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}$. La propriété $P_{n+1}$ est donc vérifiée, ce qui prouve que $P_n$ est vrai pour tout entier $n$.

(c) Il suffit d'appliquer le théorème des gendarmes à l'encadrement précédent pour conclure que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

3. (a) Exprimons : $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{(1+u_n)^2}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{1 + 2u_n + u_n^2 - 1}{u_n} = 2 + u_n$. L'encadrement demandé est alors une conséquence triviale de celui de la question 2.*b*.

(b) Effectuons donc une récurrence comme on nous le demande : au rang 2, $2 \times (2+1) = 6$, et $2 \times 3 + \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 6 + 1 = 7$. Or, on a calculé $u_2 = \frac{4}{25}$, soit $\frac{1}{u_2} = \frac{25}{4}$, qui est bien compris entre 6 et 7. Supposons désormais l'encadrement vrai au rang $n$, on peut alors écrire $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + v_n$, avec $2(n+1) \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ (hypothèse de récurrence), et $2 \leqslant v_n \leqslant 2 + \frac{1}{n}$. En additionnant ces deux encadrements, on trouve exactement $2(n+2) \leqslant \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, ce qui prouve exactement l'hérédité de notre propriété. Par principe de récurrence, celle-ci est vrai pour tout entier $n \geqslant 2$.

(c) Quel que soit le réel $t$ appartenant à l'intervalle $[k-1, k]$, on a $\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{t}$. On peut intégrer cette inégalité entre $k-1$ et $k$ pour obtenir $\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\, dt \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\, dt$, soit $\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\, dt$ (relation valable pour tout entier $k \geqslant 1$). On peut ensuite additionner ces inégalités pour toutes les valeurs de $k$ comprises entre 2 et $n$ : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\, dt = \int_{1}^{n} \frac{1}{t}\, dt$ (relation de Chasles). Cette dernière intégrale valant $[\ln(t)]_1^n = \ln(n)$, on en déduit que $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n)$, puis $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$ en ajoutant le premier terme (on ne peut évidemment pas majorer la somme directement à partir de $k = 1$).

4. En reprenant l'encadrement de la question 2.*b* et le résultat précédent, on peut écrire $2n + 2 \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2n + 3 + \ln(n)$, soit $2n + o(n) \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2n + o(n)$. On en déduit que $\frac{1}{u_n} \sim 2n$ (pour rédiger vraiment rigoureusement, le mieux est quand même de diviser tout l'encadrement par $2n$ et d'appliquer la théorème des gendarmes pour justifier que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2nu_n} = 1$). On peut passer cet équivalent à l'inverse pour trouver $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

## Exercice 2

1. Pour déterminer cette matrice, on peut calculer les images par $f$ des quatre matrices de la base canonique de $E$. Pour gagner du temps, calculons directement $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) =$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$. On en déduit que $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; et $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice de $f$ dans la base canonique est donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Les calculs de la question précédentes permettent de vérifier immédiatement que $f \circ f = \mathrm{id}$ (alternativement, on peut constater que $A^2 = I_4$). L'application $f$ est donc une symétrie, c'est un automorphisme et sa réciproque est $f$ elle-même.
3. Le plus simple est encore de revenir à la définition de $f$ : $f(M) \times f(N) = JMJJNJ = JMJ^2NJ$. Or, $J^2 = J$ (calcul immédiat), donc $f(M)f(N) = JMNJ = f(MN)$.
4. Les éléments de $F$ sont les matrices $M$ vérifiant $f(M) = M$. En reprenant l'expression générale de $f$ calculée à la première question, celà impose les conditions suivantes sur les coefficients de la matrice : $a = d$ et $b = c$. Autrement dit, $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. En particulier, la famille $\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ forme une base de $F$ (il est évident que cette famille est libre). De même, $G$ est consitué des matrices vérifiant $f(M) = -M$, ce qui impose cette fois-ci $a = -d$ et $c = -b$, soit $G = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Là encore, la famille $\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $G$.
5. On souhaite donc écrire $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & t \\ -t & -z \end{pmatrix}$. L'identification des coefficients conduit au système $\begin{cases} x + z = a \\ y + t = b \\ y - t = c \\ x - z = d \end{cases}$. Les équations extrêmes donnent $x = \dfrac{a+d}{2}$ (en les additionnant) et $z = \dfrac{a-d}{2}$ (en les soustrayant) ; de même $y = \dfrac{b+c}{2}$ et $t = \dfrac{b-c}{2}$. La solution étant unique, la décomposition de $M$ l'est également, et on a donc $M_1 = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} a+d & b+c \\ b+c & a+d \end{pmatrix}$ et $M_2 = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} a-d & b-c \\ c-b & d-a \end{pmatrix}$. Pour la matrice $M$ donnée dans l'énoncé, $M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$.
6. Surtout pas de calcul avec les coefficients des matrices, c'est inutile ! Si $A$ et $B$ appartiennent à $F$, alors $f(A) = A$ et $f(B) = B$. En appliquant la relation démontrée à la question 3, $f(AB) = f(A)f(B) = AB$, donc $AB \in F$. De même, si $A$ et $B$, appartiennent à $G$, $f(A) = -A$ et $f(B) = -B$, donc $f(AB) = (-A) \times (-B) = AB$. Autrement dit $AB \in F$.
7. Autant exploiter les résultats précédents : $MN = (M_1 + N_1)(M_2 + N_2) = M_1N_1 + M_1N_2 + M_2N_1 + M_2N_2$. La question précédente assure que $M_1N_1$ (produit de matrices de $F$) et $M_2N_2$ (produits de matrices de $G$) appartiennent à $F$, donc $M_1N_1 + M_2N_2 \in F$ (c'est un sous-espace vectoriel). Or, on peut démontrer tout aussi facilement que le produit d'une matrice de $F$ par une matrice de $G$ appartient à $G$ : si $f(A) = A$ et $f(B) = -B$, alors $f(AB) = A \times (-B) = -AB$ (et de même dans l'autre sens). On en déduit alors que $M_1N_2 + M_2N_1 \in G$. La décompotision étant unique, on conclut : $(MN)_1 = M_1N_1 + M_2N_2$, et $(MN)_2 = M_1N_2 + M_2N_1$.

# Exercice 3

## A. Propriétés générales de la fonction $f$.

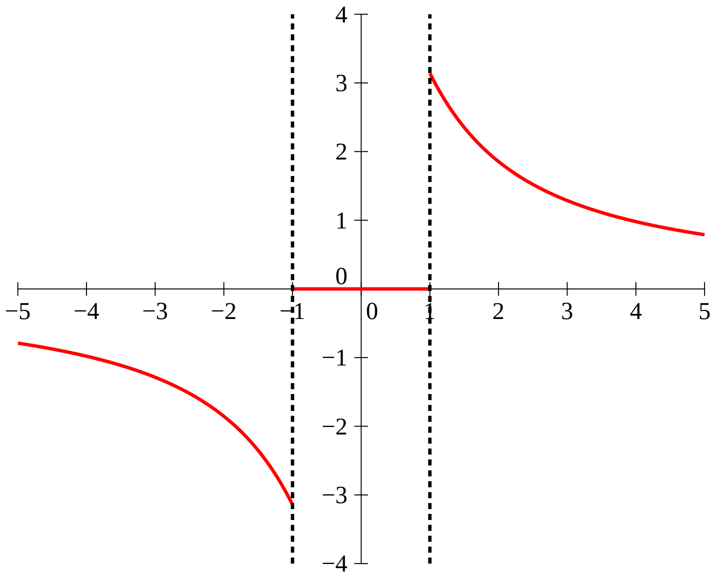
1. La fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, le deuxième morceau de la formule définissant $f$ est défini sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ (valeurs annulant le dénominateur à l'intérieur de l'arctangente). Pour le premier morceau, ce qui est dans la parenthèse est toujours définie, mais il faut vérifier que $\dfrac{2x}{1+x^2} \in [-1,1]$ pour pouvoir lui appliquer la fonction arcsinus. Une façon rapide de faire : pour tout réel $x$, $(1+x)^2 \geqslant 0$, donc $1+x^2 \geqslant -2x$. De même, $(1-x)^2 \geqslant 0$ implique $1+x^2 \geqslant 2x$. On en déduit qu'on a toujours $|2x| \leqslant 1+x^2$, donc $\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right| \leqslant 1$, ce qui démontre l'encadrement souhaité.
2. Les deux expressions $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{2x}{1-x^2}$ sont impaires. Quand on les compose par les fonctions impaires arcsin et arctan, on obtient des fonctions impaires. La fonction $f$ est donc elle-même impaire, on se contentera de l'étudier sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$.
3. Facile : $f(0) = \arcsin(0) + \arctan(0) = 0$ (on pouvait aussi utiliser le fait que $f$ est impaire). Moins facile : $f(\sqrt{3}) = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$.
4. Comme $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x}{1+x^2} = 1$, on a $\lim\limits_{x\to 1} \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. De plus, $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x}{1-x^2} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ ; et $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x}{1-x^2} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 1^+} \arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$. Finalement, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$, et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \pi$. Aucun problème pour la limite en $+\infty$ : les deux parenthèses tendent vers 0, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

## B. Variations et courbe de $f$.

1. La dérivabilité du second morceau (avec l'arctangente) est évident, c'est une composée de fonctions dérivables sur le domaine de définition de $f$. Par contre, il faut faire attention avec l'arcsinus qui n'est pas dérivable en 1 et en $-1$ : les seules valeurs de $x$ pour lesquelles $\dfrac{2x}{1+x^2} = \pm 1$ sont $x=1$ et $x=-1$ (c'est une conséquence du calcul effectué à la question $A.1$, il s'agit des valeurs annulant $(1+x)^2$ et $(1-x)^2$). Comme ces valeurs ont déjà été supprimées du domainde de définition de $f$, la fonction est bien dérivable sur tout ce domaine.
Posons $g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ et $h(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$, on calcule d'abord $g'(x) = \dfrac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$, et $h'(x) = \dfrac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2} = \dfrac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}$. Ensuite, on compose : $(\arcsin \circ g)'(x) = g'(x) \times \dfrac{1}{\sqrt{1-g(x)^2}} = \dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \times \dfrac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}} = \dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}}$.
Sur $[0,1[$, $1-x^2 > 0$, donc $(\arcsin \circ g)'(x) = \dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)(1-x^2)} = \dfrac{2}{1+x^2}$. Sur $]1,+\infty[$, $1-x^2 < 0$, et $(\arcsin \circ g)'(x) = -\dfrac{2}{1+x^2}$. De l'autre côté, $(\arctan \circ h)'(x) = \dfrac{h'(x)}{1+h(x)^2} = \dfrac{2+2x^2}{(1-x^2)^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} = \dfrac{2+2x^2}{(1-x^2)^2+4x^2} = \dfrac{2+2x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2}{1+x^2}$. On obtient bien $f'(x) = 0$ sur $[0,1[$, et $f'(x) = -\dfrac{4}{1+x^2}$ sur $]1,+\infty[$.
2. La fonction $f$ est constante sur $[0,1[$ et $f(0)=0$, donc $f(x)=0$ quel que soit $x \in [0,1[$. Sur $]1,+\infty[$, la formule obtenue pour la dérivée permet d'affirmer que $f(x) = -4\arctan(x) + k$

pour une certaine constante $k$. On peut par exemple utiliser la limite en $1^+$ pour déterminer la constante $k$ : $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -4 \times \frac{\pi}{4} + k = k - \pi$. Or, on a vu par ailleurs que cette limite était égale à $\pi$, donc $k = 2\pi$ et $f(x) = 2\pi - 4\arctan(x)$ sur $]1, +\infty[$.

3. On dispose de toutes les informations nécessaires pour tracer la courbe. Les plus courageux iront jusqu'à constater que la fonction prolongée par continuité à droite en 1 y admet une tangente verticale (on utilise par ailleurs la symétrie par rapport à l'origine du repère pour compléter la courbe) :




## C. Des équations différentielles.

1. Sur l'intervalle $[0, 1[$, l'équation se résume à $y' = 0$, les solutions en sont les fonctions constantes. Sur l'intervalle $]1, +\infty[$, les solutions seront de la forme $Ke^{-f(x)}$, donc $y(x) = Ke^{4\arctan(x)}$ (quitte à faire passer le facteur $e^{-2\pi}$ dans la constante).

2. (a) Les plus paresseux écriront $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{x-(x-1)}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$, soit $a = -1$ et $b = 1$. Les autres mettront au même dénominateur et feront une identification.

   (b) On connait déjà les solutions de l'équation homogène associée, donnée à la question 1. Cherchons une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante, en posant $y_p(x) = K(x)e^{4\arctan(x)}$. On calcule alors $y_p'(x) = K'(x)e^{4\arctan(x)} + \frac{4K(x)}{1+x^2}e^{4\arctan(x)}$, puis $y_p'(x) + f'(x)y_p(x) = K'(x)e^{4\arctan(x)} + \frac{4K(x)}{1+x^2}e^{4\arctan(x)} - \frac{4K(x)e^{4\arctan(x)}}{1+x^2} = K'(x)e^{4\arctan(x)}$. La fonction $y_p$ est donc solution de notre équation différentielle si $K'(x)e^{4\arctan(x)} = \frac{e^{4\arctan(x)}}{x(x-1)}$, soit $K'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$. On prend par exemple $K(x) = \ln(x-1) - \ln(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$, soit $y_p(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{4\arctan(x)}$. Toutes les solutions de l'équation sont alors les fonction de la forme $y(x) = \left(K + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)e^{4\arctan(x)}$.

3. (a) Un calcul classique : $\text{sh}^2(t) = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\text{ch}(2t) - 1}{2}$.

   (b) Puisqu'on nous le propose si gentiment, effectuons le changement de variable $x = \text{ch}(t)$, ce qui donne $dx = \text{sh}(t)\, dt$, donc $\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx = \int \text{sh}(t)\sqrt{\text{ch}^2(t) - 1}\, dt$. Or $\text{ch}^2(t) - 1 =$

$\mathrm{sh}^2(t)$, et sur l'intervalle considéré, $\mathrm{sh}(t) > 0$, donc $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\ dx = \int \mathrm{sh}^2(t)\ dt = \int \frac{\mathrm{ch}(2t)-1}{2}\ dt = \frac{\mathrm{sh}(2t)}{4} - \frac{t}{2}$. Il reste tout de même un tout petit détail à régler : réussir à exprimer $t$ en fonction de $x$, autrement dit, déterminer la fonction réciproque de la fonction ch (restreinte à $[0,+\infty[$). En fait, ça se fait très bien : $\mathrm{ch}(t) = x$ revient à $e^t + e^{-t} = 2x$, soit $e^{2t} - 2xe^t + 1 = 0$. On pose $T = e^t$ pour se ramener à l'équation du second degré $T^2 - 2xT + 1 = 0$, qui admet pour discriminant $\Delta = 4x^2 - 4 = 4(x^2-1) > 0$ (on a supposé $x > 1$), et admet pour racines $T_1 = \dfrac{2x + 2\sqrt{x^2-1}}{2} = x + \sqrt{x^2-1}$, et $T_2 = x - \sqrt{x^2-1}$. On conserve la racine positive et on obtient alors $t = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$. Les primitives recherchées sont donc de la forme $\dfrac{\mathrm{sh}(2\ln(x+\sqrt{x^2-1}))}{4} - \dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{2}$ (à une constante près). Avec un peu de motivation, on peut simplifier le premier morceau : $\mathrm{sh}(2\ln(a)) = \mathrm{sh}(\ln(a^2)) = \dfrac{e^{\ln(a^2)} - e^{-\ln(a^2)}}{2} = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{1}{2a^2}$, donc le premier morceau de notre primitive devient $\dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^2}{8} - \dfrac{1}{8(x+\sqrt{x^2-1})^2} = \dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^4 - 1}{8(x+\sqrt{x^2-1})^2} =$
$\dfrac{x^4 + 4x^3\sqrt{x^2-1} + 6x^2(x^2-1) + 4x(x^2-1)\sqrt{x^2-1} + (x^2-1)^2 - 1}{8(x+\sqrt{x^2-1})^2}$
$= \dfrac{8x^4 - 4x^2 + (8x^3 - 4x)\sqrt{x^2-1}}{8(x+\sqrt{x^2-1})^2} = \dfrac{x\sqrt{x^2-1}(2x^2 - 1 + 2x\sqrt{x^2-1})}{2(x+\sqrt{x^2-1})^2} = \dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2}$.

(c) Par le même calcul de variation de la constante que plus haut, on obtient la condition $K'(x) = \sqrt{x^2-1}$. On peut donc prendre pour $K$ la fonction obtenue ci-dessus, et les solutions complètes de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme $y(x) = \left(K + \dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{2}\right) e^{4\arctan(x)}$.