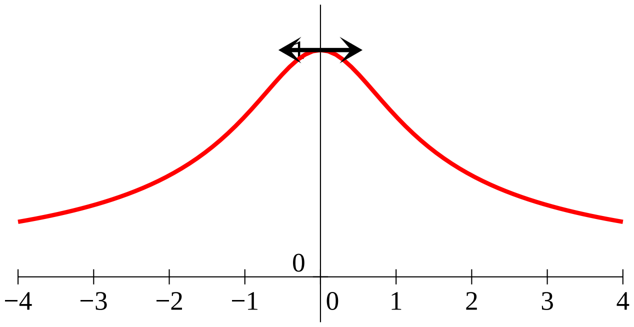
AP n°8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

18 mars 2016

Exercice 1

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ (ce qui se trouve sous la racine est strictement positif) et $f(-x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$, donc f est paire. La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ étant strictement croissante et positive sur $[0; +\infty[$, sa composition par la racine carrée (croissante) puis par l'inverse (décroissante) sera une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Par parité, f est croissante sur $]-\infty; 0]$, et admet pour maximum $f(0) = 1$. Sans difficulté, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Une allure de courbe :



2. Comme f est continue et strictement décroissante, elle est bijective de $[0, +\infty[$ dans $]0, 1]$. Pour calculer la réciproque, il faut résoudre l'équation $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = y$, ce qui donne $1 + x^2 = \dfrac{1}{y^2}$, soit $x^2 = \dfrac{1}{y^2} - 1$. Le membre de droite est toujours positif quand $y \in]0; 1]$, et on en prend la racine positive puisqu'on veut l'antécédent appartenant à $\mathbb{R}^+$, soit $x = \sqrt{\dfrac{1}{y^2} - 1}$. On en déduit que $f^{-1}(y) = \sqrt{\dfrac{1}{y^2} - 1}$.

3. Par calcul immédiat, $u_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx = [F(x)]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2})$.

   Ensuite, $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = [\sqrt{1+x^2}]_0^1 = \sqrt{2} - 1$, en remarquant que le x du numérateur est à peu de choses près la dérivée de ce qui se trouve dans la racine du dénominateur.

4. On a $u_3 = \displaystyle\int_0^1 x^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx$. On effectue donc une IPP en posant $u(x) = x^2$, donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ soit $v(x) = \sqrt{1+x^2}$ avec u et v de classe C^1 sur $[0, 1]$: $u_3 = [x^2\sqrt{1+x^2}]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\ dx = \sqrt{2} - \left[\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{2}{3}2^{3/2} + \frac{2}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$.

5. Pour comparer les intégrales u_n et u_{n+1}, on peut commencer par comparer $x^{n+1}f(x) \leq x^n f(x)$ sur $[0;1]$. Il ne reste plus qu'à intégrer l'inégalité pour obtenir $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.
6. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 puisque u_n est une intégrale de fonction positive, donc elle converge. Or, $\forall x \in [0,1]$, $\sqrt{1+x^2} \geq 1$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$. Il suffit alors de multiplier par x^n, qui est bien positif, pour obtenir $\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$. On peut alors intégrer cette inégalité, ce qui donne $0 \leq u_n \leq \displaystyle\int_0^1 x^n\ dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, une petite application du théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 2

1. On calcule donc $P_1 = (X+1)^2 - 1 = X^2 + 2X = X(X+2)$, puis $P_2 = (X+1)^4 - 1 = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X$. Pour factoriser, on a bien sûr le droit de se rendre compte qu'on a au départ une différence de deux carrés : $P_2 = ((X+1)^2+1)((X+1)^2-1) = (X^2+2X+2)(X^2+2X)$. Le premier facteur a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$ et pour racines $\dfrac{-2+2i}{2} = -1+i$ et $\dfrac{-2-2i}{2} = -1-i$, donc $P_2 = X(X+2)(X+1-i)(X+1+i)$. Passons au dernier : $P_3 = (X+1)^6 - 1 = X^6 + 6X^5 + 15X^4 + 20X^3 + 15X^2 + 6X$. Pour factoriser, utilisons encore la différence de carrés : $P_3 = ((X+1)^3+1)((X+1)^3-1) = (X^3+3X^2+3X+2)(X^3+3X^2+3X) = X(X^2+3X+3)(X^3+3X^2+3X+2)$. La première parenthèse a pour discriminant $\Delta = 9 - 12 = -3$, et pour racines $\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{2}$. L'autre parenthèse admet pour racine évidente -2 (puisque $-8 + 3 \times 4 - 6 + 2 = 0$), et se factorise sous la forme $(X+2)(X^2+X+1)$. Ce dernier facteur a pour discriminant -3 et pour racines $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, qu'on peut aussi mettre sous la forme $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$. On peut bien sûr écrire complètement la factorisation mais ça n'a aucun intérêt.
2. Il suffit de constater que $P_n(0) = 1 - 1 = 0$ pour savoir que 0 est racine de P, et qu'on peut donc factoriser P par X. Le polynôme Q_n est de degré $2n-1$ (un de moins que P_n), son coefficient dominant vaut 1 (le même que celui de P_n), et son coefficient constant correspond au coefficient de X dans le développement de $(X+1)^{2n}$, qui vaut $\dbinom{2n}{1} = 2n$ (en utilisant simplement le binôme de Newton).
3. Commençons par signaler que 0 n'est pas racine double puisqu'il n'est pas racine de Q (son coefficient constant n'est pas nul). Supposons donc que $a \neq 0$ soit racine double de P_n. On a alors $Q_n(a) = 0$, et par ailleurs $P_n'(a) = 0$. Or, $P_n' = Q_n + XQ_n'$ (en dérivant le produit), donc on déduit que $Q_n'(a) = 0$. Autrement dit, a est aussi racine double de Q_n, ce qui ne sert strictement à rien. Reprenons le calcul de P_n' à partir de son expression initiale : $P_n' = (2n)(X+1)^{2n-1}$, donc une racine double de P_n vérifierait $(a+1)^{2n-1} = 0$. Cela impliquerait évidemment que $(a+1)^{2n} = 0$, et donc a ne pourrait en fait être racine de P_n.
4. Il faut résoudre l'équation $(X+1)^{2n} = 1$. On ressort notre cours sur les racines de l'unité : $X + 1 = e^{i\frac{2k\pi}{2n}} = e^{i\frac{k\pi}{n}}$, avec $k \in \{0, \dots, 2n-1\}$. Les racines de P_n sont donc de la forme $-1 + e^{i\frac{k\pi}{n}} = e^{i\frac{k\pi}{2n}}(e^{i\frac{k\pi}{2n}} - e^{-i\frac{k\pi}{2n}}) = 2i\sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)e^{i\frac{k\pi}{2n}}$.
5. Si on enlève la racine 0 (qui correspond à $k = 0$), les racines calculées précédemment sont exactement celles du polynôme Q_n. D'après les relation coefficients-racines, leur produit est donc égal à $-2n$ (le polynôme est toujours de degré impair). Autrement dit, $-2n =$

$\prod_{k=1}^{2n-1} 2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)e^{i\frac{k\pi}{2n}}$. Or, $\prod_{k=1}^{2n-1} e^{i\frac{k\pi}{2n}} = e^{\sum_{k=1}^{2n-1} i\frac{k\pi}{2n}} = e^{i\frac{\pi}{2n}\times\frac{(2n)(2n-1)}{2}} = e^{i\frac{(2n-1)\pi}{2}} = i^{2n-1}$. On peut alors simplifier : $-2n = 2^{2n-1}i^{4n-2}\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, soit $\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{n}{2^{2n-2}}$. Pour passer au produit restreint, ce n'est pas compliqué : on constate que $\frac{(2n-k)\pi}{2n} = \pi - \frac{k\pi}{2n}$, angle qui le même sinus que $\frac{k\pi}{2n}$. Chacun des sinus du produit est donc en fait répété deux fois, sauf celui du milieur, correspondant à $k = n$, qui vaut de toute façon $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, qui n'influence pas le produit. Autrement dit, le produit restreint est exactement la racine carrée du précédent : $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

Exercice 2bis

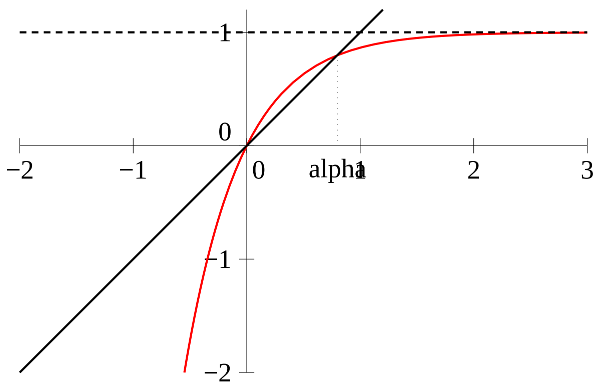
Pour que 1 soit racine multiple (au moins double) de P, il faut avoir $P(1) = P'(1) = 0$. On calcule $P' = 6X^5 - 20X^3 + 24X^2 - 18X + a$, donc $P'(1) = 0$ équivaut à $a = 8$, puis $P(1) = 0$ donne $-5 + a + b = 0$, soit $b = -3$. Autrement dit, $P = X^6 - 5X^4 + 8X^3 - 9X^2 + 8X - 3$. Ce n'est évidemment pas suffisant pour factoriser, mais on peut continuer les calculs au cas où : $P'' = 30X^4 - 60X^2 + 48X - 18$, qui s'annule aussi en 1 (qui est donc une racine au moins triple du polynôme). Allez, soyons fous : $P^{(3)} = 120X^3 - 120X + 48$. Ah non, ça ne s'annule pas en 1, tant pis. On peut tout de même factoriser notre polynôme par $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$, pour l'écrire sous la forme $P = (X^3 - 3X^2 + 3X - 1)(aX^3 + bX^2 + cX + d) = aX^6 + (b-3a)X^5 + (3a-3b+c)X^4 + (d-3c+3b-a)X^3 + (-b+3c-d)X^2 + (3d-c)X - d$. Une identification avec les coefficients de P donne les conditions $a = 1$, $b - 3a = 0$, $3a - 3b + c = -5$, $d - 3c + 3b - a = 8$, $-b + 3c - d = -9$, $3d - c = 8$ et $-d = -3$, soit $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$ et $d = 3$. Autrement dit, $P = (X-1)^3(X^3 + 3X^2 + X + 3)$. La dernière parenthèse se factorise trivialement en $X^2(X+3) + X + 3 = (X^2+1)(X+3)$. On ne peut pas faire mieux dans $\mathbb{R}[X]$: $P = (X-1)^3(X+3)(X^2+1)$. Dans $\mathbb{C}[X]$, on aura $P = (X-1)^3(X+3)(X-i)(X+i)$.

Exercice 3

1. **Étude de la fonction f.**
   (a) L'équation (E) étant équivalente à $f(x) = x$, ses solutions sont les points fixes de la fonction f.
   (b) La fonction f est bien sûr C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 2e^{-2x} > 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) Par somme et composition de limites, on obtient $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, donc la courbe de f admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$; et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
   (d) La fonction g est également C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = 2e^{-2x} - 1$. Comme $e^{-2x} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2x \geq -\ln 2$, la fonction g est strictement croissante sur $\left]-\infty; \frac{\ln 2}{2}\right]$, et strictement décroissante sur $\left[\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right[$. La fonction g admet en $\frac{\ln 2}{2}$ un maximum de valeur $g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = 1 - e^{-\ln 2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1-\ln 2}{2}$, et vérifie $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ (par croissance comparée) et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

(e) L'équation (E) est équivalente à $g(x) = 0$. On vient de voir que g était strictement monotone, donc bijective de $\left]-\infty; \frac{\ln 2}{2}\right]$ vers $\left]-\infty; \frac{1-\ln 2}{2}\right]$, et de $\left[\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right[$ vers $\left]-\infty; \frac{1-\ln 2}{2}\right]$, donc 0, appartenant à l'intervalle $]-\infty; 1]$, admet un unique antécédent inférieur à $\frac{\ln 2}{2}$ (dont on peut aisément constater qu'il est égal à 0), et un unique antécédent strictement supérieur à $\frac{\ln 2}{2}$, ce qui correspond aux deux solutions de (E). De plus, $g(\ln 2) = 1 - e^{-2\ln 2} - \ln 2 = 1 - \frac{1}{4} - \ln 2 = \frac{3}{4} - \ln 2 > 0$ et $g(1) = 1 - e^{-2} - 1 = -e^{-2} < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule donc bien sur l'intervalle $]\ln 2; 1[$.

(f) On obtient l'allure suivante pour la fonction f :



2. **Étude d'une suite récurrente**

(a) Une petite récurrence pour commencer : on sait que $\alpha < 1$, donc $u_0 > \alpha$. Si on suppose désormais $u_n \geq \alpha$, la fonction f étant strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$ à valeurs dans $[\alpha; +\infty[$, on aura également $u_{n+1} = f(u_n) > \alpha$. D'après le principe de récurrence, la propriété demandée est vérifiée.

(b) La fonction g étant négative sur $]\alpha; +\infty[$, on a $\forall x > \alpha$, $f(x) < x$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante. Étant de plus minorée par α, elle converge.

(c) La limite de (u_n) est nécessairement un point fixe de f. Or, comme $u_n > \alpha$, on aura par passage à la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geq \alpha$, et la limite ne peut donc qu'être égale à α (le deuxième point fixe de f étant 0, qui est strictement inférieur à α).

(d) Sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$, la dérivée f' de la fonction f est positive et majorée par $2e^{-2\alpha}$. Comme f est $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha; +\infty[$, et que α et u_n appartiennent à cet intervalle (avec $\alpha < u_n$), on peut leur appliquer l'inégalité des accroissements finis pour obtenir $0 \leq (f(u_n) - f(\alpha)) \leq 2e^{-2\alpha}(u_n - \alpha)$. Comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$, l'encadrement demandé en découle.

(e) Constatons qu'au vu des résultats de la première partie $2e^{-2\alpha} < 2e^{-2\ln 2} = \frac{1}{2}$. Ne reste plus qu'à faire une récurrence : pour $n = 0$, l'inégalité est triviale. Si on la suppose vraie au rang n, on aura $0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq 2e^{-2\alpha}(u_n - \alpha) \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \alpha) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (u_0 - \alpha)$, ce qui prouve l'hérédité de la propriété.

(f) Il suffit de reprendre l'inégalité précédente et de constater que $1-\alpha < 1$, puisque $0 < \alpha < 1$.