AP n°8

PTSI B Lycée Eiffel

18 mars 2016

Exercice 1

Soient f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, et (u_n) la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Étudier la fonction f (parité, variations, limites), et donner une allure de $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser, et déterminer sa réciproque f^{-1}.
3. Calculer u_0 et u_1.
4. Effectuer une intégration par parties et calculer u_3 (on pourra remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$).
5. Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
6. Prouver la convergence et déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2

On pose $P_n = (X+1)^{2n} - 1$ (pour $n \geq 1$).

1. Écrire sous forme développée P_1, P_2 et P_3 et donner leur factorisation.
2. Montrer que $P_n = XQ_n$, où Q_n est un polynôme dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant.
3. Montrer que P_n n'admet que des racines simples.
4. Déterminer les racines complexes de P_n (on les mettra sous forme exponentielle).
5. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, puis $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Exercice 2bis

Soit $P = X^6 - 5X^4 + 8X^3 - 9X^2 + aX + b$. Déterminer les valeurs de a et b pour que 1 soit racine multiple de P. Factoriser alors le polynôme P.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de résoudre numériquement l'équation (E) : $x+e^{-2x}=1$. On introduit pour cela la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1-e^{-2x}$.

1. **Étude de la fonction f.**
   (a) Que représentent les solutions de l'équation (E) pour la fonction f ?
   (b) Étudier les variations de f.
   (c) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (d) Déterminer les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x)-x$.
   (e) Montrer que l'équation (E) admet deux solutions, dont une, qu'on notera α, appartient à l'intervalle $]\ln 2, 1[$.
   (f) Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f, en faisant figurer sur le graphique la droite d'équation $y=x$.
2. **Étude d'une suite récurrente**
   On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \geq 1$ et de la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.
   (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > \alpha$.
   (b) Prouver que la suite (u_n) est monotone, puis en déduire la convergence de la suite.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.
   (d) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1}-\alpha \leq 2e^{-2\alpha}(u_n-\alpha)$.
   (e) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0-\alpha)$.
   (f) Montrer que, si $u_0 = 1$, $0 \leq u_n - \alpha \leq \frac{1}{2^n}$.