AP n°7

PTSI B Lycée Eiffel

22 janvier 2016

Exercice 1

1. Il y a $\dfrac{8!}{5!} = 336$ podiums possibles.
2. Il n'y a le choix que sur l'ordre des trois équipes, soit $3! = 6$ podiums constitués de profs de maths.
3. On passe au complémentaire : $336 - \dfrac{5!}{2!} = 336 - 60 = 276$ podiums avec au moins une équipe de profs de maths.
4. Il faut choisir l'équipe de profs de maths qui va monter sur le podium, les deux équipes sans profs de maths qui vont l'accompagner (parmi 5 possibles) et l'ordre de ces trois équipes, soit $\dbinom{3}{1}\dbinom{5}{2} \times 3! = 3 \times 10 \times 6 = 180$ podiums possibles.

Exercice 2

Si on tire simultanément :

1. Trois consonnes : $\dbinom{20}{3} = 1\ 140$ tirages.
2. Deux voyelles : $\dbinom{6}{2} \times \dbinom{20}{1} = 300$ tirages.
3. Au moins une voyelle : $\dbinom{26}{3} - \dbinom{20}{3} = 1\ 460$ tirages.

Avec des tirages successifs avec remise :

1. Deux voyelles : $6^2 \times 20 \times \dbinom{3}{1} = 2\ 160$ tirages (il faut choisir la position de la voyelle).
2. Deux lettres identiques au moins : $26 + 26 \times 25 \times \dbinom{3}{1} = 1\ 976$ (soit trois fois la même lettre, soit une lettre répétée deux fois et une autre lettre, dont il faut choisir la position).

Exercice 3

1. Il y 10 jetons au total, on en tire 4, il y a donc $\dbinom{10}{4} = 210$ tirages possibles.
2. Il faut donc tirer deux jetons bleus et deux rouges, soit $\dbinom{6}{2} \times \dbinom{4}{2} = 15 \times 6 = 90$ tirages.
3. Il ne reste plus que huit jetons disponibles, donc $\dbinom{8}{4} = 70$ tirages.
4. On a cette fois-ci 5 jetons convenables, donc $\dbinom{5}{4} = 5$ tirages possibles.

5. Il faut distinguer des cas selon les quatre numéros tirés : si on veut tirer 1, 2, 3 et 4, il y a $2^4 = 16$ tirages possibles puisqu'il existe deux jetons pour chaque numéro ; si on veut tirer le 5 et trois des numéros en double, il y a $\binom{4}{3} \times 2^3 = 32$ possibilités ; de même pour le 6 accompagné d'un des trois numéros doubles ; enfin, pour obtenir le 5, le 6 et deux des autres numéros, il y a $\binom{4}{2} \times 2^2 = 24$ possibilités. Au total, 104 tirages conviennent.
6. Là encore, plein de cas à distinguer : on peut tirer $6+2+1+1$ (deux cas puisqu'il y a deux 2 possibles) ; $5+3+1+1$ (deux cas) ; $5+2+2+1$ (encore deux cas) ; $4+4+1+1$ (un seul tirage) ; $4+3+2+1$ (16 cas) ; $3+3+2+2$ (un seul cas). Au total, on a donc 24 cas, dont les deux tiers sont constituées de la seule combinaison $4+3+2+1$.

Exercice 4

Avec des tirages successifs sans remise, les réponses deviennent :
- nombre total de tirages : $32^5 = 33\ 554\ 432$.
- avec deux Rois : $4^2 \times 28^3 \times \binom{5}{2} = 3\ 512\ 320$.
- au moins un pique : $32^5 - 28^5 = 16\ 344\ 064$.
- un As et deux carreaux : il faut distingues les cas où on tire deux fois l'As de carreau, ceux ou tire une fois l'As de carreau et une fois un autre carreau, et ceux où on tire deux carreaux qui ne sont pas l'As, ce qui donne $21^3 \times \binom{5}{2} + 7 \times 21^3 \times 5 \times 4 + 3 \times 7^2 \times 21^2 \times 5 \times \binom{4}{2} = 3\ 333\ 960$.
- pas de carte en-dessous du 9 : $24^5 = 7\ 962\ 624$.
- deux paires : il faut toujours choisir les rangs des deux paires, les cartes à tirer dans chaque paire et la dernière carte, mais également l'emplacement des cartes de la première paire dans le tirage, et celui des cartes de la deuxième paire, soit $\binom{8}{2} \times 4^2 \times 4^2 \times 24 \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} = 5\ 160\ 960$.
- cinq cartes de la même couleur : $4 \times 8^5 = 131\ 072$.
- quinte flush : $16 \times 5! = 1\ 920$.

Exercice 5

Notons k le nombre de sauts de deux marches effectués par la puce. Elle saute $2k$ marches à l'aide de ces sauts, donc effectue $13-2k$ sauts d'une marche, soit au total $13-k$ sauts. Ne reste plus qu'à choisir la position des sauts de 2 marches, et comme k peut varier entre 0 et 6, il y a au total $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} \binom{13-k}{k} = 377$ possibilités.

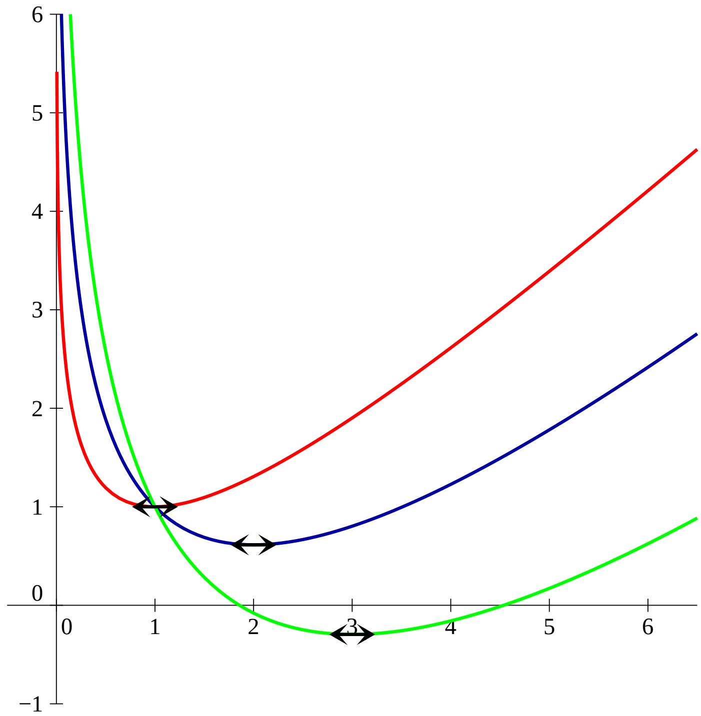
Exercice 6 : fonctions et suites implicites

1. (a) La fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f_n'(x) = 1 - \dfrac{n}{x}$. Cette dérivée s'annule pour $x = n$, par ailleurs $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = +\infty$ (n est supposé strictement positif) et par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. Enfin, $f_n(n) = n - n\ln(n) = n(1 - \ln(n))$. D'où le tableau de variations suivant :

$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
x & 0 & & n & & +\infty \\
\hline
 & +\infty & & & & +\infty \\
f & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & n(1-\ln(n)) & & \\
\hline
\end{array}$$

(b) Calculons donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x - (n+1)\ln(x) - x + n\ln(x) = -\ln(x)$. Cette expression est positive si $x \in]0;1]$, négative sur $[1;+\infty[$. Les courbes sont donc « de plus en plus haut » sur $]0;1]$, et « de plus en plus bas » sur $[1;+\infty[$. Elles ont toutes un point commun : $f_n(1) = 1$ quelle que soit la valeur de n.

(c) Voici les allures demandées (f_1 en rouge, f_2 en bleu, f_3 en vert), avec minimum indiqué.



(d) Lorsque $n \geq 3$, on a $\ln(n) > 1$ puisque $3 > e$, donc $n(1 - \ln(n)) < 0$. Or, au vu du tableau de variations de la fonction f_n, celle-ci est bijective de $]0;n[$ vers $]n(1-\ln(n));+\infty[$, et de $]n;+\infty[$ vers $]n(1-\ln(n));+\infty[$. Si $n \geq 3$, 0 a donc exactement deux antécédents, l'un (celui qu'on notera u_n) sur l'intervalle $]0;n[$, et l'autre sur $]n;+\infty[$ (qui correspond à v_n).

2. (a) On a déja remarqué plus haut que $f_n(1) = 1 > 0$. De plus, $f_n(e) = e - n\ln(e) = e - n < 0$ avec $n \geq 3$. Puisque $f_n(1) > f_n(u_n) > f_n(e)$, et la fonction f_n étant strictement décroissante sur l'intervalle $]0;n[$ auquel appartiennent ces trois valeurs, on a bien $1 < u_n < e$.

(b) Calculons donc $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1})$. Or, par définition, on sait que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire que $u_{n+1} - (n+1)\ln(u_{n+1}) = 0$ ou encore $u_{n+1} = (n+1)\ln(u_{n+1})$. En remplaçant dans le calcul précédent, on a donc $f_n(u_{n+1}) = (n+1)\ln(u_{n+1}) - n\ln(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. Comme on vient de voir que tous les termes de la suite étaient strictement supérieurs à 1, $\ln(u_{n+1}) > 0$, donc $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$. La fonction f_n étant toujours décroissante sur l'intervalle considéré, $u_{n+1} < u_n$ et la suite (u_n) est donc décroissante. Comme elle est par ailleurs minorée par 1, elle converge certainement.

(c) Au vu de l'encadrement $1 < u_n < e$, et en utilisant le fait que $u_n = n\ln(u_n)$, on a $1 < n\ln(u_n) < e$, soit $\dfrac{1}{n} < \ln(u_n) < \dfrac{e}{n}$. Les deux termes extrêmes de cet encadrement ont manifestement pour limite 0, une application du théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

(d) Puisque u_n tend vers 1, $u_n - 1$ tend vers 0, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1 + (u_n - 1))}{u_n - 1} = 1$ (limite classique du cours), ce qui revient exactement à dire que la limite recherchée vaut 1.

3. (a) Puisque $n < v_n$, le théorème de comparaison nous donne immédiatement $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

(b) Calculons donc : $f_n(n\ln(n)) = n\ln(n) - n\ln(n\ln(n)) = n\ln(n) - n\ln(n) - n\ln(\ln(n)) = -n\ln(\ln(n))$. Comme $n \geq 3$, $\ln(n) > 1$, et $\ln(\ln(n)) > 0$, donc $f_n(n\ln(n)) < 0$. Comme, par définition, $f_n(v_n) = 0$, et que sur $]n; +\infty[$, intervalle auquel appartiennent ces deux valeurs, f_n est croissante, on en déduit que $n\ln(n) < v_n$.

(c) On peut reprendre intelligemment les calculs de la toute première question : la fonction f_2 est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc on a $\forall x > 0$, $x > 2\ln(x)$. L'inégalité demandée en découle.

(d) Calculons à nouveau : $f_n(2n\ln(n)) = 2n\ln(n) - n\ln(2n\ln(n)) = 2n\ln(n) - n\ln(n) - n\ln(2\ln(n)) = n(\ln(n) - \ln(2\ln(n))$. Or, comme $n > 2\ln(n)$, $\ln(n) > \ln(2\ln(n))$, donc $f_n(2n\ln(n)) > 0$. On en déduit comme tout à l'heure que $v_n < 2n\ln(n)$.

(e) Au vu de ce qui précède, $\ln(n) + \ln(\ln(n)) \leq \ln(v_n) \leq \ln(2) + \ln(n) + \ln(\ln(n))$, donc $1 + \dfrac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \leq \dfrac{v_n}{\ln(n)} \leq 1 + \dfrac{\ln(2)}{\ln(n)} + \dfrac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$. Or, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissance comparée), donc par composition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} = 0$. Les deux membres extrêmes de l'encadr ement précédent ont donc pour limite 1, et on peut appliquer le théorème des gendarmes pour obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(v_n)}{\ln(n)} = 1$.

Exercice 7 : Matrices

Remarque préliminaire : dans tous les cas, on peut commencer par calculer $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, et même pourquoi pas $A^4 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. On peut ensuite (ou sans effectuer ces calculs préliminaires) au moins trois méthodes :

- **relation de récurrence.** On remarque que $A^2 = A + 2I$. Prouvons alors par récurrence l'existence de deux suites (a_n) et (b_n) telles que $A^n = a_nA + b_nI$. La relation est vérifiée au rang 2, mais aussi aux rangs 0 et 1 en posant $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$. Si on la suppose vraie au rang n, alors on peut calculer $A^{n+1} = A^n \times A = (a_nA + b_nI)A = a_nA^2 + b_nA = a_n(A+2I) + b_nA = (a_n + b_n)A + 2a_nI$. On a donc prouvé la propriété au rang $n+1$ (et donc pour tout entier naturel n), et en passant obtenu les relations de récurrence $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$. On en déduit que $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$. La suite (a_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - x - 2 = 0$. Cette équation a pour racines évidentes -1 et 2, donc $a_n = A.2^n + B(-1)^n$. Avec les conditions initiales, $a_0 = 0 = A + B$ et $a_1 = 1 = 2A - B$. On en déduit $A = \dfrac{1}{3}$ et $B = -\dfrac{1}{3}$, soit $a_n = \dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}$. En découle immédiatement $b_n = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}$, puis $A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$.
- **en regardant les matrices dans les yeux.** On constate de façon assez évidente qu'on peut toujours écrire $A^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$. Cela se prouve par récurrence, en multipliant la matrice précédente par A, on obtient bien une matrice de la même forme, avec de plus $u_{n+1} = 2v_n$ et $v_{n+1} = u_n + v_n$. Ce sont exactement les mêmes relations que par la méthode précédente, et on obtient évidemment les mêmes résultats.
- **par le binôme de Newton.** On constate que $A = J - I$, où J est la matrice ne contenant que des 1. Cette matrice a pour puissances $J^n = 3^{n-1}J$ pour $n \geq 1$. De plus, J et $-I$

commutent évidemment. On peut donc calculer $A^n = (J-I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (-I)^{n-k}$. On isole le premier terme pour utiliser les calculs précédents : $A^n = (-1)^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} (-1)^{n-k} J = (-1)^n I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} \right) J - \frac{(-1)^n}{3} J = \frac{(-1)^n (3I + J)}{3} + \frac{2^n}{3} J$. Si on le souhaite, on écrit la matrice explicitement pour vérifier que c'est bien la même que celle obtenue par les autres méthodes.