

AP n°7

PTSI B Lycée Eiffel

22 janvier 2016

Exercice 1 (*)

Lors d'un championnat de bridge, huit équipes se disputent les trois places du podium. Parmi elles, trois sont constituées de profs de maths.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles (il va de soi que l'ordre est important) ?
2. Combien de podiums sont entièrement constitués de profs de maths ?
3. Combien de podiums contiennent au moins une équipe de profs de maths ?
4. Combien de podiums contiennent exactement une équipe de profs de maths ?

Exercice 2 (**)

Un sac contient 26 jetons sur lesquels sont inscrites les lettres de l'alphabet (une par jeton). On pioche simultanément 3 jetons. Déterminer le nombre de tirages pour lesquels :

1. On pioche trois consonnes.
2. On pioche deux voyelles.
3. On pioche au moins une voyelle.

On pioche désormais les trois jetons successivement avec remise. Déterminer le nombre de tirages pour lesquels :

1. On pioche deux voyelles.
2. On pioche deux lettres identiques (au moins).

Exercice 3 (**)

Une urne contient 6 jetons bleus numérotés de 1 à 6, et quatre jetons rouges numérotés de 1 à 4. On tire simultanément quatre jetons dans l'urne.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Combien de tirages pour lesquels on tire deux jetons de chaque couleur ?
3. Combien de tirages sans tirer le chiffre 2 ?
4. Combien de tirages où tous les jetons tirés ont des numéros pairs ?
5. Combien de tirages où on obtient quatre numéros différents ?
6. Combien de tirages pour lesquels la somme des numéros tirés vaut 10 ?

Exercice 4 (***)

Refaire l'exercice 5 de la feuille numéro 9 en supposant les cinq cartes tirées successivement avec remise.

Exercice 5 (**)

Une puce monte un escalier de 13 marches. À chacun de ses bonds, elle peut franchir une ou deux marches, et doit s'arrêter exactement sur la treizième marche. De combien de façons peut-elle monter l'escalier ?

Exercice 6 : fonctions et suites implicites

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = x - n \ln(x)$.

1. (a) Étudier la fonction f_n sur son domaine de définition (variations et limites).
(b) Déterminer la position relative des courbes représentatives des fonctions f_n .
(c) Tracer dans un même repère une allure rapide des courbes représentatives de f_1 , f_2 et f_3 .
(d) Expliquer pourquoi, si $n \geq 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions, qu'on notera u_n et v_n (u_n étant la plus petite des deux), et qui vérifient $0 < u_n < n < v_n$.
2. (a) Montrer que $\forall n \geq 3, u_n \in]1; e[$.
(b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, en déduire la monotonie et la convergence de la suite (u_n) .
(c) En utilisant un encadrement de $\ln(u_n)$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
(d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$.
3. (a) Déterminer la limite de la suite (v_n) .
(b) Calculer $f_n(n \ln(n))$, en déduire que $n \ln(n) < v_n$.
(c) Montrer que $\forall n \geq 1, n > 2 \ln(n)$.
(d) En déduire le signe de $f_n(2n \ln(n))$, puis que $n \ln(n) < v_n < 2n \ln(n)$.
(e) En déduire la limite de $\frac{\ln(v_n)}{\ln(n)}$.

Exercice 7 : Matrices

Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ par la méthode de votre choix.