

AP : Séance n°6

PTSI B Lycée Eiffel

15 janvier 2016

Fonctions usuelles

Étudier le plus complètement possible (courbe représentative incluse, bien entendu) la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln(e^x - 1)}{x}$.

Trigonométrie

Étudier la fonction f définie par $f(x) = \sin(x) \cos(x) - \sin(x) \cos^3(x)$.

Calcul

1. Prouver que, $\forall t \in [0, 1]$, $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$.
2. Montrer que, si $1 \leq k \leq n$, on a $k(n-k+1) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.
3. Montrer que $(n!)^2 = \prod_{k=1}^n k(n+1-k)$.
4. En déduire que $(\sqrt{n})^n \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ pour tout entier $n \geq 1$.

Intégrales

Calculer $\int_0^1 \frac{5x^2 - 3x + 1}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$.

Équations différentielles

On cherche à résoudre sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ l'équation $(1+2x)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$.

1. Déterminer une solution de la forme $y_p(x) = e^{ax}$, où a est une constante réelle.
2. En posant $y(x) = e^{ax}z(x)$, déterminer une équation différentielle vérifiée par la fonction z .
3. En déduire les solutions de notre équation.

Complexes

Pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on pose $f(z) = \frac{z+i}{z-1}$.

1. Écrire $f(z)$ sous forme algébrique (en ayant posé $z = a + ib$).
2. Déterminer l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles $f(z) \in \mathbb{R}$. Même question pour avoir $f(z) \in i\mathbb{R}$. Encore pareil pour $f(z) \in \mathbb{U}$.
3. Déterminer les points fixes de l'application f .