AP n°5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

4 décembre 2015

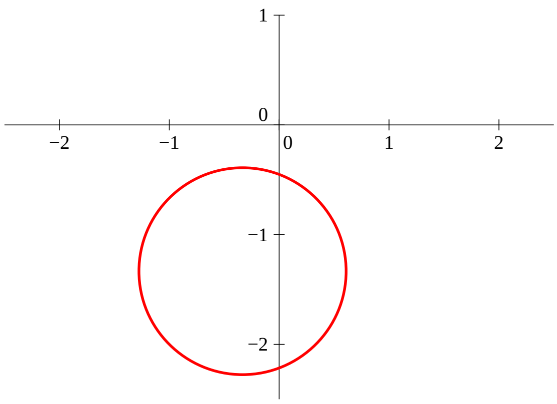
Exercice 1 : un peu d'équas diffs pour ne pas perdre la main

1. Commençons par résoudre l'équation homogène $y'' - 2y' + 2y = 0$. L'équation caractéristique associée $x^2 - 2x + 2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$ et admet pour racines $r_1 = \dfrac{2+2i}{2} = 1 + i$ et $r_2 = \dfrac{2-2i}{2} = 1 - i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $y_h : x \mapsto (A\cos(x) + B\sin(x))e^x$. Pour trouver une solution particulière, on va écrire le cosinus du membre de droite comme partie réelle de e^{ix}, et chercher une solution de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{ix}\operatorname{ch}(x) = xe^{ix} \times \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{xe^{(1+i)x}}{2} + \dfrac{xe^{(-1+i)x}}{2}$. On va utiliser le principe de superposition. Commençons par chercher une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(1+i)x}$ sous la forme $y_1(x) = (ax^2 + bx + c)e^{(1+i)x}$ (on est obligés d'augmenter le degré du polynôme puisque $1 + i$ est racine de l'équation caractéristique). On calcule $y_1'(x) = (2ax + b)e^{(1+i)x} + (1 + i)(ax^2 + bx + c)e^{(1+i)x}$, puis $y_1''(x) = e^{(1+i)x}(2a + (2 + 2i)ax + b + ib + (2+2i)ax + b + ib + 2iax^2 + 2ibx + 2ic)$. On obtient donc $y_1''(x) - 2y_1'(x) + 2y_1(x) = e^{(1+i)x}(2iax^2 + (4+4i)ax + 2ibx + 2a + 2b + 2ib + 2ic - 4ax - 2b - (2+2i)ax^2 - (2+2i)bx - 2c - 2ci + 2ax^2 + 2bx + 2c) = e^{(1+i)x}(4aix + 2a + 2ib)$. Par identification, on doit donc avoir $4aix + 2a + 2ib = x$, soit $a = \dfrac{1}{4i} = -\dfrac{1}{4}i$, et $a + bi = 0$, donc $b = -\dfrac{a}{i} = \dfrac{1}{4}$. Notre première solution particulière sera donc $y_1(x) = \left(-\dfrac{1}{4}ix^2 + \dfrac{1}{4}x\right)e^{(1+i)x}$. Reste à reprendre la partie réelle pour trouver une solution particulière de notre équation réelle initiale (ou plutôt de sa première moitié) : $y_1(x) = \dfrac{1}{4}\operatorname{Re}((x - ix^2)(\cos(x) + i\sin(x)e^x) = \dfrac{1}{4}x\cos(x)e^x + \dfrac{1}{4}x^2\sin(x)e^x$. Il reste à traiter la deuxième partie de notre superposition. On cherche donc une solution à l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(-1+i)x}$ sous la forme $y_2(x) = (ax + b)e^{(-1+i)x}$. On calcule joyeusement $y_2'(x) = e^{(-1+i)x}(a - ax - b + aix + bi)$, puis $y_2''(x) = e^{(-1+i)x}(-a + ai - a + ax + b - aix - bi + ai - aix - bi - ax - b) = e^{(-1+i)x}(-2aix - 2a + 2ai - 2bi)$. On a ensuite $y_2''(x) - 2y_2'(x) + 2y_2(x) = e^{(-1+i)x}(-2aix - 2a + 2ai - 2bi - 2a + 2ax + 2b - 2aix - 2bi + 2ax + 2b) = e^{(-1+i)x}(4a(1-i)x - 4a + 2ai + 4(1-i)b)$. Par identification, on trouve alors $a = \dfrac{1}{4(1-i)} = \dfrac{1+i}{8}$, puis $a(i - 2) + 2(1 - i)b = 0$, soit $b = \dfrac{(2-i)(1+i)}{16(1-i)} = \dfrac{(3+i)(1+i)}{32} = \dfrac{1+2i}{16}$. Bien, on en est donc à $y_2(x) = \left(\dfrac{1+i}{8}x + \dfrac{1+2i}{16}\right)e^{(-1+i)x}$, puis en passant à la partie réelle $y_2(x) = \dfrac{1}{16}\operatorname{Re}(((2+2i)x + 1 + 2i)(\cos(x) + i\sin(x))e^{-x}) = \dfrac{1}{16}((2x + 1)\cos(x)e^{-x} - 2(x + 1)\sin(x)e^{-x})$. Il ne reste plus enfin qu'à tout diviser par 2 puisqu'on avait enlevé les $\dfrac{1}{2}$ pour la superposition) et à additionner les deux à notre solution homogène pour enfin trouver les solutions complètes : $y(x) = \left(\dfrac{1}{8}(x\cos(x) + x^2\sin(x)) + A\cos(x) + B\sin(x)\right)e^x + \dfrac{1}{32}((2x + 1)\cos(x) - 2(x + 1)\sin(x))e^{-x}$. Ouf !
2. Commençons par l'équation homogène, qui a pour équation caractéristique $x^2 - 2kx + 1 +$

$k^2 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = 4k^2 - 4(1+k^2) = -4$, les racines sont donc $r_1 = \dfrac{2k+2i}{2} = k+i$, et $r_2 = k-i$, et les solutions de l'équation homogène de la forme $y_h : x \mapsto (A\cos(x) + B\sin(x))e^{kx}$. Pour trouver une solution particulière, on écrit $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$, et on cherche une solution de l'équation $y'' - 2ky' + (1+k^2)y = e^{(1+i)x}$ sous la forme $y_c(x) = Ke^{(1+i)x}$ (d'après l'hypothèse $k \neq 1$, $1+i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique). On calcule facilement $y_c'(x) = (K+Ki)e^{(1+i)x}$, puis $y_c''(x) = 2Kie^{(1+i)x}$, et on trouve donc $y_c'' - 2ky_c' + (1+k^2)y_c = e^{(1+i)x}(2Ki - 2kK - 2Kki + K + Kk^2)$. Par identification, $K = \dfrac{1}{(k-1)^2 - 2(k-1)i} = \dfrac{1}{k-1} \times \dfrac{1}{k-1-2i} = \dfrac{k-1+2i}{(k-1)(k^2-2k+5)}$. Autrement dit, $y_c(x) = \dfrac{k-1+2i}{(k-1)(k^2-2k+5)}e^{(1+i)x}$, et il ne reste plus qu'à prendre la partie imaginaire pour obtenir $y_p(x) = \dfrac{1}{(k-1)(k^2-2k+5)}\mathrm{Im}((k-1-2i)(\cos(x)+i\sin(x))e^x) = \dfrac{1}{(k-1)(k^2-2k+5)}(-2\cos(x)+(k-1)\sin(x))e^x$. Soit finalement $y(x) = (A\cos(x)+B\sin(x))e^{kx} + \dfrac{((k-1)\sin(x) - 2\cos(x))e^x}{(k-1)(k^2-2k+5)}$.

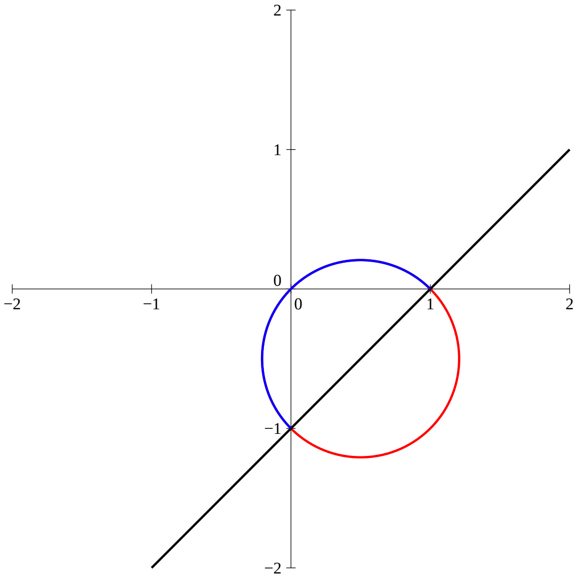
Complexes : fourre-tout

1. Soyons joyeusement bourrins en posant $z = a+ib$, et en élevant tout au carré (on peut, tout est positif) : $|z-1|^2 = 4|z+i|^2$, soit $|(a-1)+ib|^2 = 4|a+i(1+b)|^2$, donc $(a-1)^2 + b^2 = 4(a^2 + (1+b)^2)$. On développe joyeusement (j'inverse les deux membres) : $4a^2 + 4b^2 + 8b + 4 = a^2 + b^2 - 2a + 1$, donc $3a^2 + 3b^2 + 2a + 8b + 3 = 0$. Quitte à tout diviser par trois, on reconnait une équation de cercle qu'on va factoriser : $a^2 + b^2 + \dfrac{2}{3}a + \dfrac{8}{3}b + 1 = 0$, soit $\left(a+\dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{1}{9} + \left(b+\dfrac{4}{3}\right)^2 - \dfrac{16}{9} + 1 = 0$, ou encore $\left(a+\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(b+\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$. On reconnait le cercle de centre $A\left(-\dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{3}i\right)$ et de rayon $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Un petit dessin pour illustrer :



2. On peut traduire simplement la condition par $\dfrac{z-1}{z+i} \in i\mathbb{R}^+$, soit $(z-1)(\overline{z+i}) \in i\mathbb{R}^+$ (attention, c'est modulo 2π, donc la partie imaginaire devra être positive). Bourrinons en posant $z = a+ib$, alors $(z-1)(\overline{z+i}) = (a-1+ib)(a-i(b+1)) = a^2 - a + b^2 + b + i(ab - ab - a + b + 1)$. La condition est donc vérifiée si, d'une part, $a^2 - a + b^2 + b = 0$, soit $\left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + \left(b + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} = 0$, on reconnait l'équation du cercle de centre $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; et d'autre part si $b + 1 - a \geqslant 0$, soit $b \geqslant a - 1$, ce qui signifie que notre point doit être situé au-dessus de la

droite d'équation $y = x - 1$ dans le plan complexe. Encore une illustration (seule la moitié de cercle surlignée en bleu est solution du problème) :



3. On peut déjà remplacer $|\bar{z}|$ par $|z|$ dans les égalités, c'est la même chose. On se retrouve donc en particulier avec la condition $|z|^2 = |z|$, ce qui implique manifestement $|z| = 1$ (ou $z = 0$, mais cette valeur n'est pas solution de toute façon). On peut donc poser $z = e^{i\theta}$, et il reste simplement à vérifier la condition $|1 - z| = 1$. Or, $|1 - e^{i\theta}| = |e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})| = |e^{i\frac{\theta}{2}} \times (-2i\sin\frac{\theta}{2})| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$. On se retrouve donc avec $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}$, soit $\frac{\theta}{2} = \pm\frac{\pi}{6}$, ou $\frac{\theta}{2} = \pm\frac{5\pi}{6}$. Modulo 2π, on a donc les valeurs possibles pour l'angle : $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{3}$. Les deux seules solutions du problème sont donc $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. (a) On commence par poser $Z = z^2$ pour se ramener à l'équation du second degré $Z^2 - (3 + 8i)Z - 16 + 12i = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = (3 + 8i)^2 + 4(16 - 12i) = 9 + 48i - 64 + 64 - 48i = 9$. C'est sympa, pas besoin de gros calculs pour obtenir $Z_1 = \frac{3 + 8i - 3}{2} = 4i$ et $Z_2 = \frac{3 + 8i + 3}{2} = 3 + 4i$. Il ne reste plus qu'à chercher les racines carrées de ces deux valeurs. Pour Z_1, on n'est pas obligés d'utiliser la méthode habituelle, on peut écrire $4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$, et en déduire que $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, et $z_2 = -z_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$. Par contre, pour Z_2, on va revenir à la méthode habituelle en posant $z = a + ib$ et en écrivant $z^2 = 3 + 4i$. En développant $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$, on obtient les deux conditions $a^2 - b^2 = 3$ et $2ab = 4$, et on rajoute comme d'habitude la condition sur le module : $|z|^2 = a^2 + b^2 = |3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$. En additionnant et en soustrayant les équations extrêmes, on trouve $2a^2 = 8$, soit $a = \pm 2$, et $2b^2 = 2$, soit $b = \pm 1$. Les réels a et b devant être de même signe à cause de la condition $2ab = 4$, on trouve donc les deux solutions $z_3 = 2 + i$ et $z_4 = -2 - i$. L'équation initiale a donc quatre solutions comme prévu.

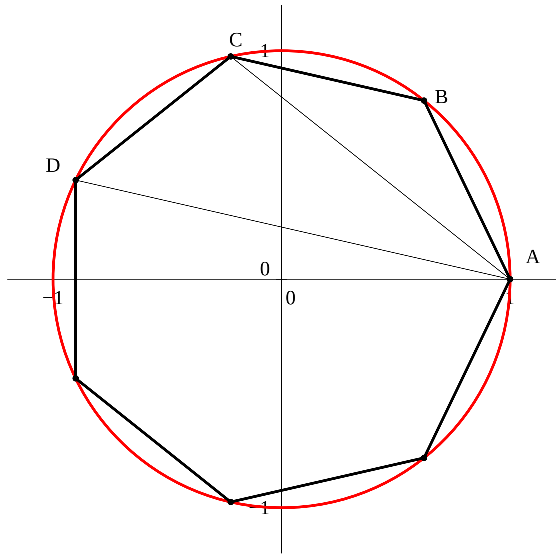
   (b) Deux possibilités pour simplifier cette équation de degré 3 : soit on se rend compte que $z = -i$ est racine évidente, soit on ne s'en rend pas compte mais on sait factoriser : $z^3 - i = z^3 - (-i)^3 = (z + i)(z^2 - iz - 1)$, l'équation dévient alors $(z + i)(z^2 - iz - 7) = 0$. La deuxième parenthèse a pour discriminant $\Delta = -1 + 28 = 27$, et admet donc pour racines $z_1 = \frac{i + 3\sqrt{3}}{2}$, et $z_2 = \frac{i - 3\sqrt{3}}{2}$. Il y a donc trois solutions à l'équation : $-i$, $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

(c) Cette équation revient à dire que $z^4 = 2\,\mathrm{Re}(z)$. En particulier, z^4 est un nombre réel, ce qui implique $\arg(z^4) \equiv 0[\pi]$, donc $4\arg(z) \equiv 0[\pi]$, et $z \equiv 0\left[\frac{\pi}{4}\right]$. Distinguons plusieurs cas, en commençant par $z = a \in \mathbb{R}$, l'équation devient alors $a^4 = 2a$, soit $a(a^3 - 2) = 0$, ce qui nous donne comme premières solutions $a = 0$ et $a = \sqrt[3]{2}$. Passons maintenant au cas où $z = bi \in i\mathbb{R}$, ce qui nous ramène à l'équation $b^4 = 0$, qui n'a donc pas d'autre solution que $z = 0$ qu'on avait déjà obtenue. Cas suivant, quand $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$, ce qui revient à dire que $z = c(1+i) = c + ci$, avec $c \in \mathbb{R}$. On a alors $z^4 = c^4(1+i)^4 = c^4(2i)^2 = -4c^4$. On est donc ramenés à l'équation $-4c^4 = 2c$, soit $2c(1 + 2c^3) = 0$. On retrouve encore une fois la solution nulle, ainsi que $c = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, soit encore $z = \frac{-1-i}{\sqrt[3]{2}}$. Dernier cas pour la route : si $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$, ce qui revient à dire que $z = d(1-i)$. On trouve alors $z^4 = d^4(1-i)^4 = d^4(-2i)^2 = -4d^4$. Même conclusion que tout à l'heure, on trouve $z = \frac{-1+i}{\sqrt[3]{2}}$. On a fini le tour, il y a donc quatre solutions au total.

5. Si on note z l'affixe d'un point du plan, et z' l'affixe de son image par la rotation r, alors $z' - i = e^{i\frac{\pi}{6}}(z - i)$, et $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(z - i) + i = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + \frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i$, ce qu'on notera de façon légèrement abusive $r(z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + \frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i$. De même, on aura $r'(z) = -i(z-1)+1 = -iz+i+1$. On peut alors calculer $r \circ r'(z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(-iz+i+1) + \frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{3}}z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$. Sans surprise, notre isométrie est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$ (la somme des angles de r et de r'). Il ne reste plus qu'à déterminer son centre, qui est le point fixe de l'application : $r \circ r'(z) = z$ donne $z - \frac{1}{2}z + i\frac{\sqrt{3}}{2}z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$, soit en multipliant partout par 2, $z = \frac{\sqrt{3}+3i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+3i)(1-i\sqrt{3})}{1+3} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

6. Supposons donc que le triangle ABC est équilatéral direct (s'il est indirect, la formule finale est légèrement modifiée, il y a une imprécision dans l'énoncé), et notons $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$. Profitons-en pour rappeler que ce nombre est une racine cubique de l'unité, et qu'on a donc $j^3 = 1$, ainsi que $1 + j + j^2 = 0$. Le triangle est donc équilatéral direct si et seulement si $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$, ou encore $c - e^{i\frac{\pi}{3}}b + a(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1) = 0$. Or, $e^{i\frac{\pi}{3}} = -e^{-2i\frac{\pi}{3}} = -j^2$, et $e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$. On trouve donc la première condition équivalente $c + j^2b + aj = 0$. Bien entendu, en multipliant par j ou j^2, on trouve les conditions symétriques $jc + b + j^2a = 0$ et $j^2c + jb + a = 0$ (en utilisant que $j^3 = 1$). Si le triangle est équilatéral indirect, on aurait de même les conditions $a + jc + j^2b = ja + j^2c + b = j^2a + c + jb = 0$.

7. Il suffit de prouver la formule pour un heptagone régulier particulier, et elle sera vraie pour tous les autres (au pire, toutes les distances seront multipliées par une même constante, ce qui ne change rien). Tant qu'à faire, prenons un heptagone régulier qu'on connait bien, celui formé par les racines septièmes de l'unité dans le plan complexe. Quitte à décider de renommer les points, on peut choisir $z_A = 1$, $z_B = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $z_C = e^{i\frac{4\pi}{7}}$ et $z_D = e^{i\frac{6\pi}{7}}$:



Il ne reste plus qu'à calculer les distances, par exemple $AB = |z_B - z_A| = |e^{i\frac{2\pi}{7}-1}|$. C'est une occasion rêvées de factoriser par l'angle moitié : $AB = |e^{i\frac{\pi}{7}}(e^{i\frac{\pi}{7}} - e^{-i\frac{\pi}{7}})| = |e^{i\frac{\pi}{7}}| \times \left|2i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ (qui est évidemment positif). Le même calcul donnera $AC = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ et $AD \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$. En mettant tout au même dénominateur, prouver que $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$ revient alors à prouver que $AC \times AD - AB \times AD - AB \times AC = 0$, soit $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) = 0$. Utilisons joyeusement des transformations somme-produit (en multipliant tout par 2 et en transformant les angles négatifs en leur opposés par parité du cosinus) pour transformer le membre de gauche en $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right) = 0$. Ah ben ça marche !

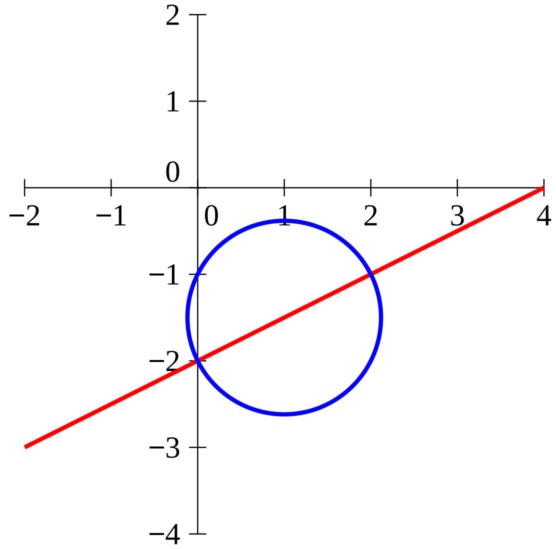
Exercice 3

1. (a) Il faut calculer $\frac{x-2+i(y+1)}{x+i(y+2)} = \frac{(x-2+i(y+1))(x-i(y+2))}{x^2+(y+2)^2}$ $= \frac{x^2-2x+y^2+3y+2+i(xy+x-xy-2x+2y+4)}{x^2+(y+2)^2}$. Autrement dit $\text{Re}(Z) = \frac{x^2-2x+y^2+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$ et $\text{Im}(Z) = \frac{2y-x+4}{x^2+(y+2)^2}$.

   (b) i. L'ensemble E correspond aux valeurs de z pour lesquelles $2y - x + 4 = 0$, c'est-à-dire aux points du plan situés sur la droite d'équation $y = \frac{x}{2} - 2$.

   ii. De même, l'ensemble F est défini par l'équation $x^2 - 2x + y^2 + 3y + 2 = 0$. On reconnait une équation de cercle qu'on factorise sous la forme $(x-1)^2 - 1 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0$, soit $(x-1)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$. Il s'agit du cercle de centre $B\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

   (c) On note en passant que le point d'intersection de ces deux ensembles est le point d'affixe $z = 2 - i$, ce qui est cohérent puisque cette valeur est la seule pour laquelle $f(z) = 0$.



2. On calcule $|f(z)-1|\times|z+2i| = \left|\dfrac{z-2+i}{z+2i}-1\right|\times|z+2i| = \left|\dfrac{z-2+i-z-2i}{z+2i}\right|\times|z+2i| = |-2-i| = \sqrt{5}$. Or, quand z parcourt le cercle décrit par l'énoncé, on a par définition $|z+2i|=\sqrt{5}$, donc en reprenant le calcul précédent $|f(z)-1| = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$, ce qui signifie que Z se trouve sur un cercle de centre C d'affixe 1 et de rayon 1.