

AP : Séance n°5

PTSI B Lycée Eiffel

4 décembre 2015

Exercice 1 : un peu d'équas diffs pour ne pas perdre la main

1. Résoudre l'équation $y'' - 2y' + 2y = x \cos(x) \operatorname{ch}(x)$.
2. Résoudre l'équation $y'' - 2ky' + (1 + k^2)y = e^x \sin(x)$, où $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Complexes : fourre-tout

Toutes les questions forment des petits exercices indépendants.

1. Déterminer l'ensemble des points du plan complexe pour lesquels $\left| \frac{z-1}{z+i} \right| = 2$.
2. Idem pour la condition $\arg \left(\frac{z-1}{z+i} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
3. Idem pour la condition $|z^2| = |1-z| = |\bar{z}|$.
4. Résoudre les équations suivantes :
 - (a) $z^4 - (3+8i)z^2 - 16 + 12i = 0$.
 - (b) $z^3 - i = 6(z+i)$.
 - (c) $z^4 = z + \bar{z}$.
5. A et B sont les points d'affixes respectives i et 1 . On note r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$, r' la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Déterminer une équation de $r \circ r'$, et reconnaître l'isométrie correspondante.
6. Soient A , B et C trois points d'affixes respectives a , b et c , montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$ (où $j = e^{i\frac{\pi}{3}}$).
7. Soit $ABCDEFGH$ un heptagone régulier, montrer que $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.

Exercice 3

On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de $-2i$, associe $Z = f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}$.

1. (a) Si $z = x + iy$, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y .
(b) En déduire la nature de :
 - i. l'ensemble E des points M d'affixe z , tels que Z soit un réel.
 - ii. l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur.(c) Représenter ces deux ensembles.
2. On appelle A le point d'affixe $z_A = -2i$.
Calculer $|f(z) - 1| \times |z + 2i|$, et en déduire que les points M' d'affixe Z , lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.