AP n°4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

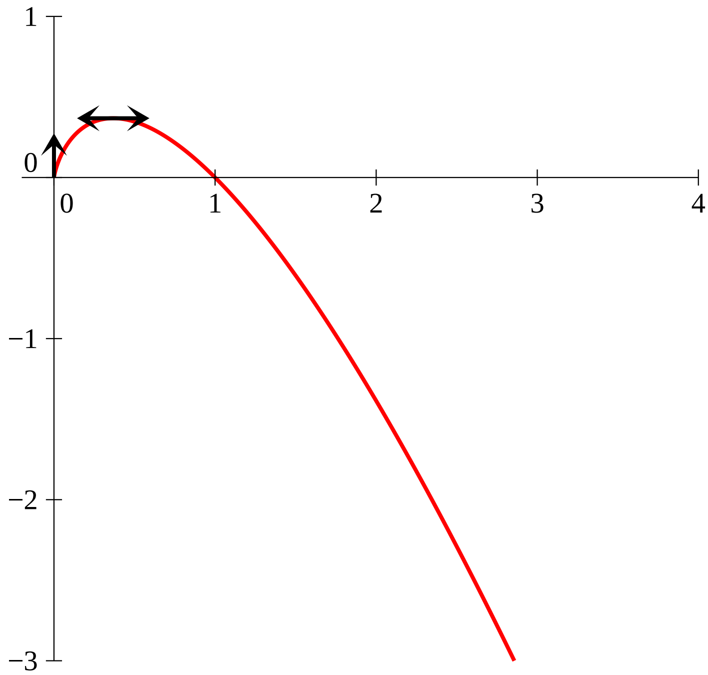
19 novembre 2015

Exercice 1

1. Puisqu'on nous le suggère gentiment, posons $y(t) = z(t)e^{2t}$ (ce qu'on peut toujours faire), ce qui donne $y'(t) = (2z(t) + z'(t))z^{2t}$, puis $y''(t) = (4z(t) + 4z'(t) + z''(t))e^{2t}$. En reportant dans l'équation de départ, on trouve alors l'équation équivalente $e^{2t}(4z(t) + 4z'(t) + z''(t) - 8z(t) - 4z'(t) + 4z(t)) = \dfrac{e^{2t}}{t^2}$, soit $z''(t) = \dfrac{1}{t^2}$, ce qui est effectivement nettement plus sympathique. Deux solutions à partir de ce point : soit on détermine directement toutes les fonctions z possibles (et donc toutes les y ensuite), ce qui donne $z'(t) = -\dfrac{1}{t} + K$, puis $z(t) = -\ln(t) + Kt + L$, et donc $y(t) = (-\ln(t) + Kt + L)e^{2t}$; soit on cherche juste une fonction z convenable, qui donne une seule solution particulière de notre équation, par exemple $z(t) = -\ln(t)$, et $y_p(t) = -\ln(t)e^{2t}$. Il faut alors résoudre l'équation homogène $y'' - 4y' + 4y = 0$. L'équation caractéristique qui lui est associée est $x^2 - 4x + 4 = 0$, soit $(x-2)^2 = 0$. Il y a une seule solution double égale à 2, dont on déduit que $y_h(t) = (At + B)e^{2t}$. On retrouve bien sûr les mêmes solutions générales que tout à l'heure.
2. Aucun problème pour résoudre l'équation homogène : l'équation caractéristique est x^2-2x+2, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$, et pour racines $x_1 = \dfrac{2+2i}{2} = 1 + i$ et $x_2 = 1 - i$. On en déduit les solutions de l'équation homogène : $y_h(t) = (A\cos(t) + B\sin(t))e^t$. Pour la solution particulière, il vaut mieux commencer par linéariser le membre de droite sous la forme $\cos^2(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos(2t)}{2}$. Par principe de superposition, on découpe la recherche de solution particulière en deux. L'équation $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{1}{2}$ a pour solution triviale $y_{p_1}(t) = \dfrac{1}{4}$.
Pour l'autre morceau, deux possibilités :
Soit on sait qu'on peut chercher $y_{p_2}(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t)$, on calcule alors $y'_{p_2}(t) = -2a\sin(2t) + 2b\cos(2t)$, puis $y''_{p_2}(t) = -4a\cos(2t) - 4b\sin(2t)$. L'équation $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{1}{2}\cos(2t)$ donne alors $(-2a - 4b)\cos(2t) + (4a - 2b)\sin(2t) = \dfrac{1}{2}\cos(2t)$. On en déduit les deux conditions $-2a - 4b = \dfrac{1}{2}$ et $4a - 2b = 0$, qui impliquent que $b = 2a$, puis $-10a = \dfrac{1}{2}$, soit $a = -\dfrac{1}{20}$ et $b = -\dfrac{1}{10}$. Autrement dit, $y_{p_2}(t) = -\dfrac{1}{20}\cos(2t) - \dfrac{1}{10}\sin(2t)$.
Soit on utilise la méthode du cours en passant aux complexes, et en cherchant une solution à l'équation $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{1}{2}e^{2it}$, en posant $y_{p_2}(t) = Ke^{2it}$. On a alors $y'_{p_2}(t) = 2iKe^{2it}$, puis $y''_{p_2}(t) = -4Ke^{2it}$, donc l'équation se résume à la condition $(-2-4i)Ke^{2it} = \dfrac{1}{2}e^{2it}$, soit $K = \dfrac{1}{-4-8i} = \dfrac{-4+8i}{16+64} = -\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{10}i$, puis $y_{p_2}(t) = \left(-\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{10}i\right)e^{2it}$. Il suffit de prendre la partie réelle de ce produit pour retrouver exactement la même solution particulière que par l'autre méthode.
La conclusion est la même dans les deux cas : en recollant tous les morceaux, $y(t) = (A\cos(t) + B\sin(t))e^t - \dfrac{1}{20}\cos(2t) - \dfrac{1}{10}\sin(2t) + \dfrac{1}{4}$.

Exercice 2

1. La fonction est naturellement définie, dérivable et tout ce qu'on veut sur $]0, +\infty[$. Commençons par étudier ses variations : $f'(x) = -\ln(x) - 1$, qui s'annule en $e^{-1} = \frac{1}{e}$. La fonction est croissante sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ et décroissante ensuite, et admet pour maximum $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$. Les calculs de limites ne sont pas plus compliqués : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ est immédiat, et $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ par croissance comparée. On peut donc prolonger la fonction par continuité en posant $f(0) = 0$. our savoir si ce prolongement est dérivable, on peut calculer le taux d'accroissement en 0 : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-x\ln(x)}{x} = -\ln(x)$, qui a pour limite $+\infty$ quand x tend vers 0. Le prolongement n'est donc pas dérivable en 0, on peut par contre affirmer la présence d'une tangente verticale en 0. Une allure de courbe :



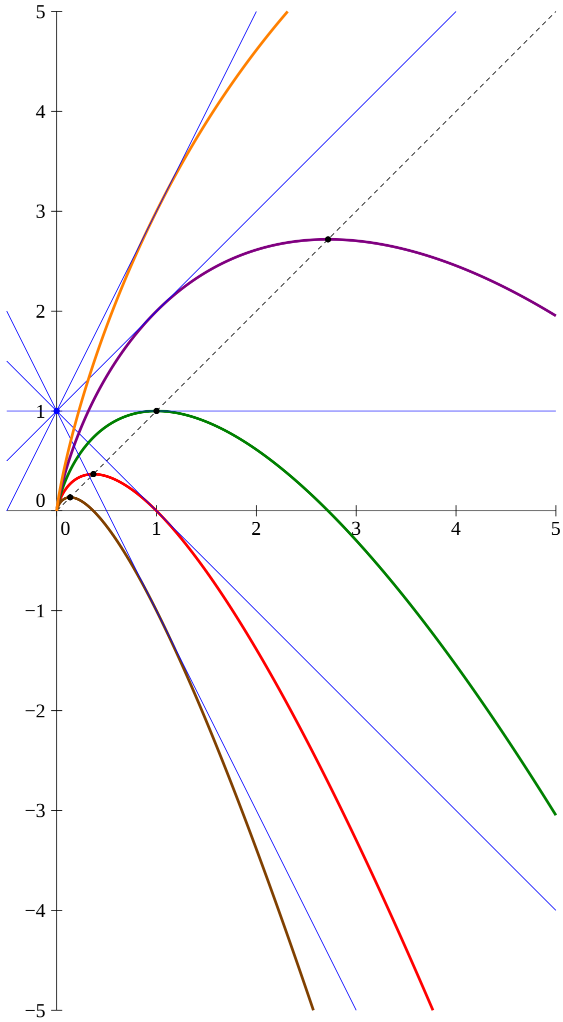
2. On commence bien sûr par normaliser l'équation : $y' - \frac{1}{x}y = -1$. L'équation sans second membre a des solutions de la forme $y_h(x) = Ke^{\ln(x)} = Kx$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $y_h(x) = Le^{\ln(-x)} = -Lx$ sur $\mathbb{R}^{-*}$. On peut deviner une solution particulière évidente ici, mais pour s'entraîner, appliquons la variation de la constante (sur les deux intervalles simultanément, inutile de faire deux calculs) en cherchant $y_p(x) = xK(x)$. On a alors $y_p'(x) = K(x) + xK'(x)$, donc $y_p(x) - \frac{1}{x}y_p(x) = K(x) + xK'(x) - K(x) = xK'(x)$. La fonction y_p est donc solution de notre équation différentielle si $xK(x) = -1$, soit $K(x) = -\ln(|x|)$, et donc $y_P(x) = -x\ln(|x|)$. Finalement, les solutions sont de la forme $y(x) = (K - \ln(x))x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $y(x) = -(L + \ln(-x))x$ sur $\mathbb{R}^{-*}$. En laissant sous forme développée, et en appliquant des résultat de croissance comparée classique, on voit que toutes ces solutions ont une limite nulle en 0 (que ce soit en 0^+ ou en 0^- selon l'intervalle sur lequel elles sont définies). Reste le problème de la dérivée : si on prend la formule obtenue sur $\mathbb{R}^{+*}$, $y'(x) = K - \ln(x) - 1$, qui a une limite infinie en 0. Même pas la peine de chercher à étudier de l'autre côté, on ne pourra de toute façon pas obtenir de solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ à l'équation.

3. On sait que $f(x) = (K - \ln(x))x$. Pour avoir $f(x_0) = y_0$, on impose donc $(K - \ln(x_0))x_0 = y_0$,

ou encore $K = \dfrac{y_0}{x_0} + \ln(x_0)$. On peut alors écrire que $f(x) = \left(\dfrac{y_0}{x_0} - \ln\left(\dfrac{x}{x_0}\right)\right) x$. On a déjà calculé la dérivée des solutions plus haut, on sait que $f'(x_0) = K - \ln(x_0) - 1 = \dfrac{y_0}{x_0} - 1$. La tangente correspondante a donc pour équation $y = \left(\dfrac{y_0}{x_0} - 1\right)(x - x_0) + y_0 = \left(\dfrac{y_0}{x_0} - 1\right) x + x_0$. Si on veut que les droites soient concourantes, il vaut trouver une valeur de x pour laquelle y ne dépend pas de y_0. Comme $y = y_0 \times \dfrac{x}{x_0} + x_0 - x$, il suffit de prendre $x = 0$, ce qui donne toujours $y = x_0$. Je vous sens venir, vous allez protester que 0 n'appartient pas à $\mathbb{R}^{+*}$ et que ça pose problème. En fait, pas du tout ! Les tangentes à la courbe sont des droites, définies pour tout réel, et peu importe qu'elles soient concourantes à une abscisse nulle.

4. Répétons une nouvelle fois que, pour les solutions de (E), $y'(x) = K - \ln(x) - 1$. Cette dérivée s'annule lorsque $x = e^{K-1}$, et elle est négative avant cette valeur et positive après, ce qui correspond bien à un maximum. La valeur du maximum correspondant est $y(e^{K-1}) = (K - \ln(e^{K-1}))e^{K-1} = e^{K-1}$. Autrement dit, le maximum est toujours situé sur la droite d'équation $y = x$. Plus précisément, le lieu des maxima est la demi-droite ouverte issue de l'origine incluse dans cette droite, puisqu'on e^{K-1} parcourt exactement $\mathbb{R}^{+*}$ lorsque K varie dans $\mathbb{R}$.

5. Résumons les données des questions précédentes dans le cas où $x_0 = 1$: on aura $K = y_0$ et la tangente au point d'abscisse 1 aura pour équation $y = (K - 1)x + 1$. ces tangentes se coupent au point de coordonnées $(0, 1)$. Pour $K = 0$, la solution est simplement la fonction f étudiée à la question 1. En général, notre solution aura un maximum en e^{K-1}, de valeur identique. Sur la figure, est tracée en pointillés la demi-droite qui est le lieu des maxima, en bleu les tangentes en 1, et les courbes en diverses couleurs pour des valeurs différentes de K : rouge pour $K = 0$, vert pour $K = 1$, violet pour $K = 2$, et marron pour $K = -1$. Les maxima ne sont exceptionnellement pas indiqués par des doubles flèches horizontales pour ne pas surcharger la figure mais seulement par des points noirs.



Exercice 3

1. Normalisons l'équation : $z' - \frac{1}{x}z = x^2$. Puisqu'on est sur $]0, +\infty[$, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $z_h : x \mapsto Ke^{\ln(x)} = Kx$. On va utiliser la variation de la constante pour trouver une solution particulière de la forme $z_p(x) = xK(x)$ (non, on ne cherche pas une forme particulière du genre un polynôme de degré 2 puisque l'équation n'est pas à coefficients constants). On a alors $z_p'(x) = xK'(x) + K(x)$, puis $z_p'(x) - \frac{1}{x}z_p(x) = xK'(x) + K(x) - K(x) = xK'(x)$. Pour que z_p soit solution de l'équation, on doit donc avoir $xK'(x) = x^2$, soit $K'(x) = x$, et donc $K(x) = \frac{x^2}{2}$. Autrement dit, on peut choisir $z_p(x) = \frac{1}{2}x^3$. Les solutions de l'équation complète sont alors de la forme $z(x) = \frac{1}{2}x^3 + Kx$.
2. Avec les hypothèses faites, z est dérivable (puisque $xy' - y$ est dérivable, y étant supposée deux fois dérivable) et $z' = y' + xy'' - y' = xy''$. On en déduit que $xz' - z = x^2y'' - xy' + y = x^3$ par hypothèse. La fonction z est donc bien solution de l'équation résolue à la question précédente.
3. En reprenant les résultats des deux questions précédentes, on a nécessairement $xy' - y = \frac{1}{2}x^3 + Kx$. Nous voila devant une équation du premier ordre qu'on devrait être capables de résoudre. On commence par normaliser : $y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{2}x^2 + K$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme Lx (cette constante est évidemment indépendante de la constante

K), on va chercher une solution particulière à l'aide de la variation de la constante : $y_p(x) = xL(x)$. le calcul est le même qu'à la première question, seul le second membre a changé, on trouve donc $xL'(x) = \frac{1}{2}x^2 + K$, soit $L'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{K}{x}$. On peut donc choisir $L(x) = \frac{1}{4}x^2 + K\ln(x)$, soit $y_p(x) = \frac{1}{4}x^3 + Kx\ln(x)$. Finalement, $y(x) = \frac{1}{4}x^3 + x(K\ln(x) + L)$. Si on a peur d'avoir ajouté des solutions à un moment ou à un autre (ici ça ne devrait pas être le cas), on vérifie : $y'(x) = \frac{3}{4}x^2 + K\ln(x) + L + K$, puis $y''(x) = \frac{3}{2}x + \frac{K}{x}$, donc $x^2y'' - xy' + y = \frac{3}{2}x^3 + Kx - \frac{3}{4}x^3 - Kx\ln(x) - Lx - Kx + \frac{1}{4}x^3 + Kx\ln(x) + Lx = x^3$. Tout marche bien !

4. On peut utiliser exactement la même méthode, les solutions particulières des équations homogènes sont toujours de la forme Kx (ou Lx) au signe de la constante près, et on trouve de la même façon $z(x) = \frac{1}{2}x^3 + Kx$, par contre à la fin on doit changer le signe à l'intérieur du ln pour obtenir $y(x) = \frac{1}{4}x^3 + x(K\ln(-x) + L)$. Allez, changeons le nom des constantes pour être rigoureux : $y(x) = \frac{1}{4}x^3 + x(A\ln(-x) + B)$. Par croissance comparée, les fonctions solutions auront toujours une limite nulle en 0, que ce soit en 0^+ ou en 0^-, ce qui permet au moins de les prolonger par continuité. Reprenons maintenant la formule pour y' sur $]0, +\infty[$: $y'(x) = \frac{3}{4}x^2 + K\ln(x) + L + K$. Cette fonction ne peut avoir de limite en 0 que si $K = 0$, et on a alors $\lim_{x \to 0^+} y'(x) = L$. C'est exactemet la même chose en 0^-, où la limite sera égale à B. Pour avoir des solutions qui se recollent, on doit donc imposer $K = A = 0$ et $L = B$, soit $y(x) = \frac{1}{4}x^3 + Lx$.