

AP : Séance n°3

PTSI B Lycée Eiffel

6 novembre 2015

Trigonométrie

On considère la fonction f définie par $f(x) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f , étudier sa parité et sa périodicité, en déduire un intervalle d'étude I intelligent.
2. Montrer que f est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle à préciser, et donner une expression de sa réciproque g .
3. Calculer la dérivée de f (lorsque cela a un sens) en déduire une expression simple de f sur I .
4. En déduire une expression simple de $g(x)$.
5. Exprimer $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, et retrouver l'expression simplifiée de f à l'aide de ces formules.

Injections et surjections

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2x^2}{x^2 - 1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Étudier la fonction f , et en dresser un tableau de variations complet.
3. En déduire si f est injective ou surjective. Déterminer deux ensembles I et J les plus grands possibles tels que f effectue une bijection de I vers J .
4. En oubliant les deux questions précédentes, étudier l'injectivité de f en revenant à la définition du cours.
5. Même chose pour la surjectivité. Retrouver les résultats de la question 3, et donner une expression de la réciproque de $f|_I$.

Calculs d'intégrales

- $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt$
- $\int_{-3}^0 |x^2 - x - 2| dx$
- $\int_0^{\ln(2)} x^2 e^x dx$
- $\int_0^2 (t+1) \operatorname{ch}(t) dt$
- $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(x)} dx$ (formules de duplication)
- $\int_0^{\pi} \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} dx$ (en posant $t = \sin(x)$)
- $\int_0^1 \frac{e^x}{2+e^x} dx$ (en posant $t = e^x$)
- $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}} dx$ (poser $t = \sqrt{x}$)
- $F(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\arctan(t)}{t} dt$ (dérivez!)