AP n°2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

25 septembre 2015

Quelques équations

1. Pour que le membre de droite ait un sens, on doit avoir $x \leqslant 1$, on va donc résoudre sur l'intervalle $]-\infty, 1]$. Il faut également enlever la valeur $x = -1$, qui est une valeur interdite pour le membre de gauche. Par ailleurs, si $x < -1$, ce même de gauche est strictement négatif, et l'inégalité est alors nécessairement vérifiée, l'intervalle $]-\infty, -1[$ est donc inclus dans l'ensemble des solutions de notre inéquation. Si $x \in]-1, 1]$, tout est positif à gauche comme à droite, on peut élever au carré pour obtenir l'inéquation équivalente $\dfrac{1}{x^2+2x+1} \leqslant 1-x$, soit $1 \leqslant (x^2+2x+1)(1-x) = -x^3 - x^2 + x + 1$, ce qui donne donc $x^3 + x^2 - x \leqslant 0$. Le membre de gauche se factorise sous la forme $x(x^2+x-1)$, et la parenthèse a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, et s'annule en $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, et en $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^3+x^2-x		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dans l'intervalle qui nous concerne, on garde comme solutions les nombres dans l'intervalle $\left[0, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Finalement, $\mathcal{S} =]-\infty, -1[\cup \left[0, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

2. On effectue le changement de variable $X = e^x$, et l'équation devient $X + \dfrac{e}{X} = e - 1$, soit $X^2 + (1-e)X + e = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = (1-e)^2 - 4e = 1 - 6e + e^2 < 0$. Il n'y a pas de solution réelle à l'équation : $\mathcal{S} = \emptyset$.

3. On peut commencer par regrouper et factoriser : $2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$, soit $2^{2x-1}(2+1) = 3^{x-\frac{1}{2}}(3+1)$, donc $3 \times 2^{2x-1} = 4 \times 3^{x-\frac{1}{2}}$. Il est temps de passer au ln des deux côtés, pour obtenir $\ln(3) + (2x-1)\ln(2) = 2\ln(2) + \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\ln(3)$. En regroupant, $x(2\ln(2) - \ln(3)) = 2\ln(2) - \dfrac{1}{2}\ln(3) - \ln(3) + \ln(2) = 3\ln(2) - \dfrac{3}{2}\ln(3)$. On trouve donc comme unique solution $x = \dfrac{3\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3)}{2\ln(2) - \ln(3)}$.

4. Un classique, on écrit tout avec des exponentielles (en multipliant par 2 au passage) : $7(e^x + e^{-x}) + 2(e^x - e^{-x}) - 18 = 0$, soit $9e^x + 5e^{-x} - 18 = 0$. On multiplie ensuite tout par e^x et on pose $X = e^x$ pour trouver l'équation du second degré $9X^2 - 18X + 5 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 18^2 - 9 \times 20 = 9 \times 36 - 9 \times 20 = 9 \times 16$. On a donc $\sqrt{\Delta} = 12$, et les racines du

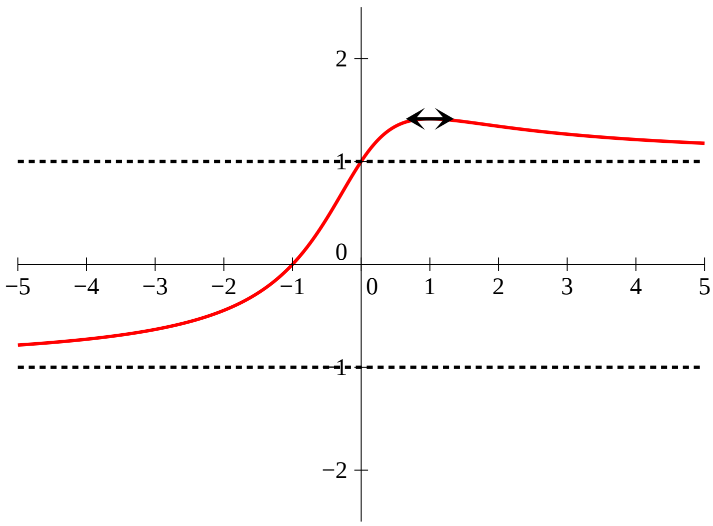
trinôme sont $X_1 = \dfrac{18-12}{18} = \dfrac{1}{3}$, et $X_2 = \dfrac{18+12}{18} = \dfrac{5}{3}$. Les deux racines sont positives, et on trouve $\mathcal{S} = \{-\ln(3), \ln(5) - \ln(3)\}$.

Quelques études de fonctions.

- La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ puisqu'on a toujours $x^2 + 1 > 0$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_1'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - (x+1) \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-x(x+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée s'annule pour $x = 1$, où la fonction f_1 admet un maximum de valeur $f(1) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Pour le calcul des limites, on procède comme souvent en factorisant numérateur et dénominateur, mais attention, il y a un petit piège : $f_1(x) = \dfrac{x(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}$. Attention au fait que $\sqrt{x^2} = |x|$. Si $x > 0$, on trouve donc $f_1(x) = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 1$, mais si $x < 0$, $f_1(x) = -\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -1$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f_1	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

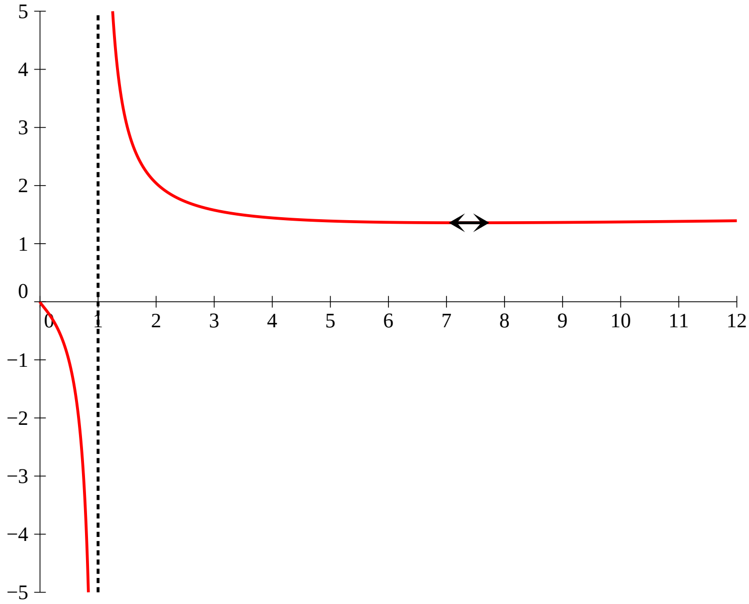
Si on veut être plus précis, on peut noter que $f_1(0) = 1$, et que f_1 est du signe de $x+1$, donc positive sur $[-1, +\infty[$. On conclut avec une première courbe :



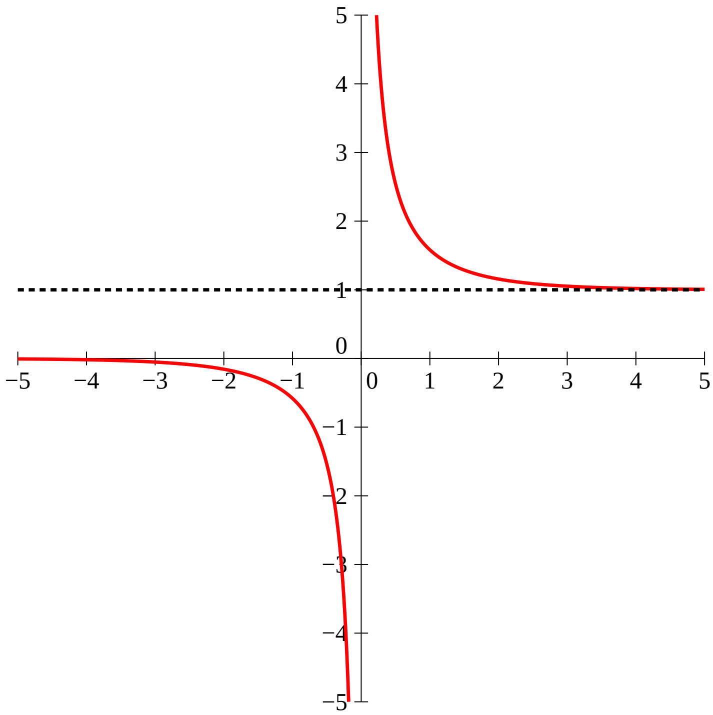
- La fonction f_2 est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ (attention à la valeur d'annulation du logarithme !), elle est dérivable sur cet intervalle, de dérivée $f_2'(x) = \dfrac{\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x}}{\ln^2(x)} = \dfrac{\ln(x) - 2}{2\sqrt{x}\ln^2(x)}$.

Notre fonction est donc décroissante sur $]0,1[$ et sur $]1,e^2[$, admet un maximum de valeur $f_2(e^2) = \frac{e}{2}$, et est décroissante sur $]e^2,+\infty[$. On obtient sans difficulté $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 0$ (pas de forme indéterminée ici), $\lim\limits_{x\to 1^-} f_2(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f_2(x) = +\infty$, et enfin $\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x) = +\infty$ par croissance comparée (pour les plus curieux, il n'y a pas d'asymptote oblique). On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

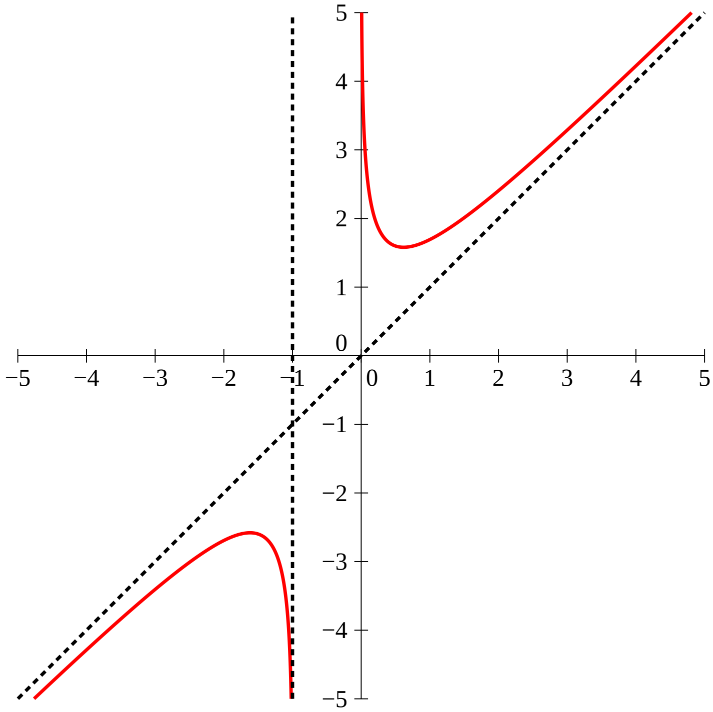
x	0		1		e^2		$+\infty$
f_2	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{e}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$



- La fonction f_3 est définie si $e^x \neq 1$, donc sur $\mathbb{R}^*$. Elle y est dérivable, de dérivée $f_3'(x) = \frac{e^x(e^x-1) - e^{2x}}{(e^x-1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x-1)^2}$, donc elle est décroissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. On obtient immédiatement $\lim\limits_{x\to -\infty} f_3(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f_3(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f_3(x) = +\infty$. Seule la limite en $+\infty$ nécessite un petit calcul, on peut par exemple diviser numérateur et dénominateur par e^x pour écrire $f_3(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$, et en déduire que $\lim\limits_{x\to +\infty} f_3(x) = 1$. Je ne me fatigue pas à faire un tableau de variations, voici la courbe :



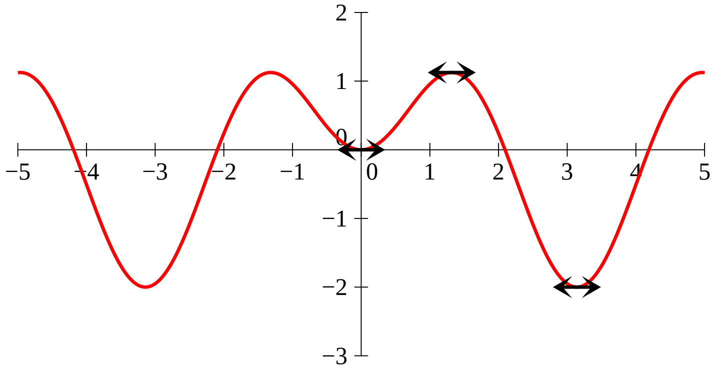
- La fonction f_4 est définie si $1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+1}{x}>0$. Cela se produit sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ (pas besoin de tableau de signe, j'espère !). Elle y est dérivable, de dérivée $f_4'(x)=\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+1=1-\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{x^2+x-1}{x(x+1)}$. Le dénominateur de cette dérivée est toujours positif sur $\mathcal{D}_{f_4}$, et son numérateur a pour discriminant $\Delta=1+4=5$, il s'annule pour $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (qui appartiennent tous les deux à notre domaine de définition). Les valrus prises par la fonction aux deux extrema locaux n'ont vraiment aucun intérêt et sont particulièrement ignobles. Par contre, on peut constater que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, ce qui prouve directement que la droite d'équation $y=x$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f_4 en $+\infty$ et en $-\infty$ (et accessoirement donne donc les limites de la fonction à l'infini). On calcule par ailleurs sans difficulté $\lim\limits_{x\to-1}f_4(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}f_4(x)=+\infty$, ce qui donne une courbe d'allure suivante :



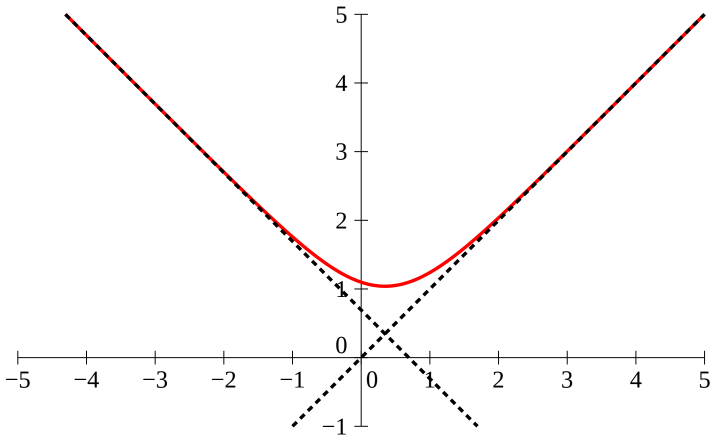
- La fonction f_5 est définie sur $\mathbb{R}$, paire et 2π-périodique, on peut se contenter de l'étudier sur $[0, \pi]$. Elle est dérivable sur cet intervalle, de dérivée $f_5'(x) = -\sin(x) + 2\sin(2x) = \sin(x)(4\cos(x) - 1)$ en utilisant la formule de duplication du sinus. Cette dérivée s'annule (sur notre intervalle d'étude) et 0 et en π, mais aussi en $\arccos\left(\dfrac{1}{4}\right)$, qui est un angle appartenant à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (on ne peut pas dire beaucoup mieux, si ce n'est qu'il est compris entre $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{2}$) que l'on notera θ. On calcule $f_5(0) = 1 - 1 = 0$; $f_5(\pi) = -1 - 1 = -2$, et si on est courageux $f_5(\theta) = \cos(\theta) - (2\cos^2(\theta) - 1) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + 1 = \dfrac{9}{8}$, pour dresser le tableau de variations suivant :

x	0		θ		π
f_5	0	$\nearrow$	$\dfrac{9}{8}$	$\searrow$	-2

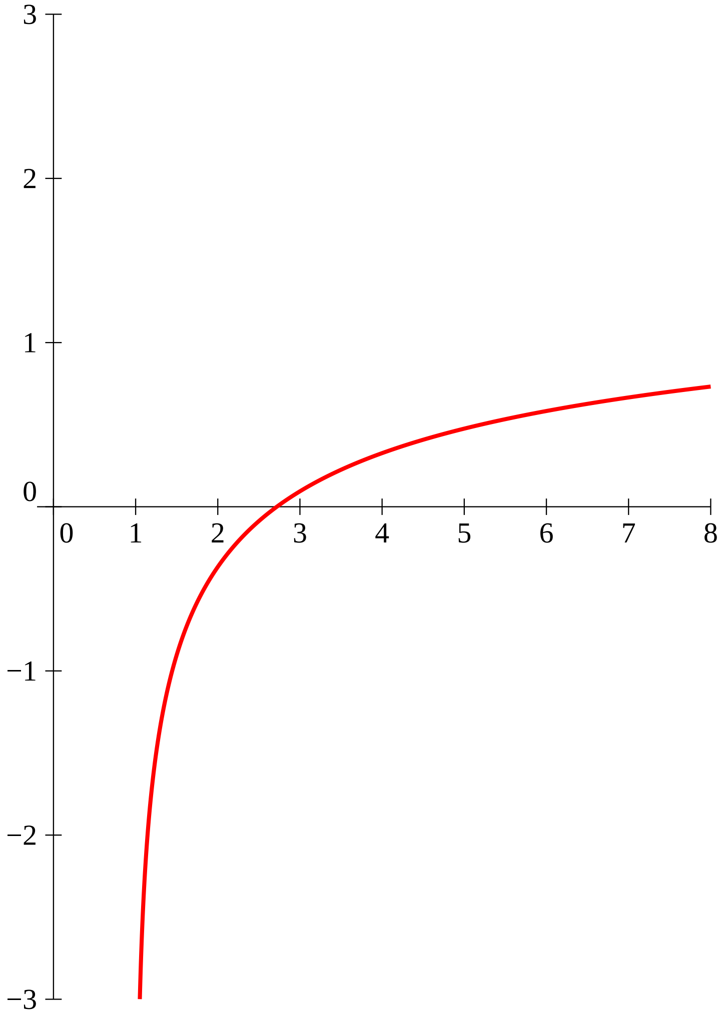
Si on veut compléter un peu l'étude, on peut s'intéresser au signe de f_5 sur $[0, \pi]$: f_5 s'annule lorsque $\cos(x) = \cos(2x)$, soit $x \equiv 0[2\pi]$, ou $2x \equiv -x[2\pi]$, ce qui donne la valeur d'annulation supplémentaire $x = \dfrac{2\pi}{3}$.



- La fonction f_6 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (ce qui se trouve dans le ln est toujours strictement positif), de dérivée $f_6'(x) = \dfrac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}}$. La derivée est du signe de son numérateur, donc de $e^{2x} - 2$ (quitte à factoriser par e^{-x}). Or, $e^{2x} \geqslant 2$ si $x \geqslant \dfrac{\ln(2)}{2}$. On peut calculer $f_6\left(\dfrac{\ln(2)}{2}\right) = \ln\left(\sqrt{2} + \dfrac{2}{\sqrt{2}}\right) = \ln(2\sqrt{2}) = \dfrac{3}{2}\ln(2)$. De plus, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_6(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée). Avant de tracer la courbe, on peut s'intéresser aux asymptotes de f_6 : du côté de $+\infty$, on peut écrire $f_5(x) = \ln(e^x(1+2e^{-2x})) = x + \ln(1+2e^{-2x})$, avec le deuxième morceau qui a une limite nulle en $+\infty$. Cela suffit à prouver que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe de f_6 en $+\infty$. De même, la droite d'équation $y = -x + \ln(2)$ est asymptote en $-\infty$.



- La fonction f_7 est définie si $\ln(x) > 0$, donc sur $]1, +\infty[$ (et elle est positive sur $]e, +\infty[$). Pas la peine de calculer de dérivée, elle est évidemment croissante comme composée de fonctions croissantes. Pas de difficulté pour les limites non plus : $\lim\limits_{x \to 1} f_7(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_7(x) = +\infty$. Il n'y a plus qu'à tracer une allure de courbe !



- On commence bien sûr par mettre sous forme exponentielle : $f_8(x) = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$, cette fonction étant définie sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ (cf fonction 4). La fonction est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée $f_8'(x) = \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$. La parenthèse n'ayant pas un signe évident, on pose $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$, fonction qui a pour dérivée $g'(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$. La fonction g est donc croissante sur $]-\infty,-1[$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ (calcul immédiat), g et donc f_8' sont positives sur $]-\infty,-1[$. Sur $]0,+\infty[$, au contraire, g est décroissante, mais on a de même une limite nulle en $+\infty$, donc f_8' est à nouveau positive sur cet intervalle. La fonction f_8 est donc croissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. Il ne reste plus qu'à calculer les limites : en posant $X = \frac{1}{x}$, on constate que X tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$, et que $f(x) = e^{\frac{\ln(1+X)}{X}}$. On a dans l'exponentielle une limite classique vue en cours, qui est égale à 1, ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_8(x) = e$. Pas de forme indéterminée en -1, ce qui est dans l'exponentielle tend vers $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1} f_8(x) = +\infty$. Enfin, en 0, on peut écrire $x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = x\ln(1+x) - x\ln(x)$ et appliquer la croissance comparée pour prouver que ce qui est dans l'exponentielle tend vers 0 et en déduire que $\lim\limits_{x\to 0} f_8(x) = 1$. On conclut avec une dernière courbe :