AP n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

19 septembre 2014

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse :

- $x \leqslant 1 \Leftrightarrow x^2 \leqslant 1$ est fausse, par exemple $x = -2$ vérifie l'inégalité de gauche, mais pas celle de droite.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = x$ est fausse, ça ne marche que si $x \geqslant 0$. En fait, plus généralement, $\sqrt{x^2} = |x|$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x \geqslant x$ est évidemment fausse si $x \leqslant 0$.
- $(x^a)^b = (x^b)^a$ est vraie.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| = |x| \times |y|$ est vraie.
- $x < y \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$ est fausse, ça ne marche que si x et y sont de même signe.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \neq x$, $|y| = |x|$ est fausse, car ça ne marche pas pour $x = 0$ (par contre c'est vrai pour $x \in \mathbb{R}^*$).
- $\exists x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall y \in \mathbb{R}^{+*}$, $x \leqslant y$ est fausse, on peut toujours trouver un réel strictement positif plus petit qu'un réel strictement positif y donné, par exemple $x = \dfrac{y}{2}$.

Compléter dans chacun des cas à l'aide d'un symbole parmi $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ et $\Leftrightarrow$:

- $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ (dans l'autre sens ça ne marche pas car $x = -3$ convient également).
- $x > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > 0$.
- f est minorée $\Leftarrow$ f admet un minimum (une fonction peut être minorée sans avoir de minimum, par exemple si elle a une limite finie en $+\infty$).
- $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$ (même chose que pour la première proposition).
- $|x - 3| \geqslant 0 \Leftarrow x \geqslant 3$ (en fait, la proposition de gauche est toujours vraie, elle est impliquée par n'importe quoi).
- (u_n) admet une limite finie $\Rightarrow$ (u_n) est majorée (une suite peut être bornée sans avoir de limite, par exemple si elle est périodique ; par contre, si elle admet une limite finie, elle finit par avoir toutes ses valeurs dans un intervalle borné, et n'en prend qu'un nombre fini avant, ce qui assure l'existence d'une valeur maximale).
- $\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (subtile différence avec la première proposition).
- $x = e^y \Leftrightarrow \ln(x) = y$ (définition d'une réciproque).
- f est continue $\Leftarrow$ f est dérivable.

Simplifier les calculs suivants :

- $(-2)^3 = -8$

- $3x-5-(((2x-1)-(3+2x))-((-2x+1)-(3-x))) = 3x-5-((-4)-(-x-2)) = 3x-5-(x-2) = 2x-3$
- $\dfrac{25\times 12^2\times 10^3}{24\times 8^2\times 12^3} = \dfrac{5^2\times 2^4\times 3^2\times 2^3\times 5^3}{2^3\times 3\times 2^6\times 2^6\times 3^3} = 2^{-8}\times 3^{-2}\times 5^5 = \dfrac{3\ 125}{2\ 304}$
- $\sqrt{2592} = \sqrt{2\times 1296} = 2\sqrt{648} = 2\sqrt{2\times 324} = 4\sqrt{162} = 4\sqrt{2\times 81} = 36\sqrt{2}$
- $\dfrac{x^3+x^5}{x^4+x^6} = \dfrac{x^3(1+x^2)}{x^4(1+x^2)} = \dfrac{1}{x}$
- $(2x+1)^3-(3x+2)^2 = 8x^3+12x^2+6x+1-(9x^2+12x+4) = 8x^3+3x^2-6x-3$

On calcule donc :

- $f(1) = \dfrac{1-3-1}{2+1-3-2} = \dfrac{3}{2}$
- $f(3) = \dfrac{27-9-1}{54+9-9-2} = \dfrac{17}{52}$
- $f(-2) = \dfrac{-8+6-1}{-16+4+6-2} = \dfrac{3}{8}$
- $f(-3) = \dfrac{-27+9-1}{-54+9+9-2} = \dfrac{19}{38} = \dfrac{1}{2}$
- $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{1}{8}-\frac{3}{2}-1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-2} = \dfrac{-\frac{19}{8}}{-3} = \dfrac{19}{24}$
- $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{-\frac{8}{27}+2-1}{-\frac{16}{27}+\frac{4}{9}+2-2} = \dfrac{\frac{19}{27}}{-\frac{4}{27}} = -\dfrac{19}{4}$
- $f(\sqrt{2}) = \dfrac{2\sqrt{2}-3\sqrt{2}-1}{4\sqrt{2}+2-3\sqrt{2}-2} = \dfrac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $f(-\sqrt{3}) = \dfrac{-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}-1}{-6\sqrt{3}+3+3\sqrt{3}-2} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}-1} = \dfrac{1+3\sqrt{3}}{26}$

Calculer les dérivées des fonctions suivantes (et étudier les variations si vous êtes courageux) :

- si $f(x) = x\sqrt{1-x}$, alors $f'(x) = \sqrt{1-x}+x\times\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$. La fonction f est définie sur $]-\infty,1]$ et admet un maximum en $\dfrac{2}{3}$, de valeur $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.
- si $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)-1}$, alors $f'(x) = \dfrac{\ln(x)-1-1}{(\ln(x)-1)^2} = \dfrac{\ln(x)-2}{(\ln(x)-1)^2}$. La fonction est définie sur $\mathbb{R}^{+*}\backslash\{e\}$, elle est décroissante sur $]0,e[$ et sur $]e,e^2[$, croissante sur $]e^2,+\infty[$ et admet un minimum local en e^2, de valeur $f(e^2) = \dfrac{e^2}{2-1} = e^2$.
- si $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x-1)}$, alors $f'(x) = \dfrac{\ln(x-1)-\frac{x}{x-1}}{\ln^2(x-1)} = \dfrac{(x-1)\ln(x-1)-x}{\ln^2(x-1)}$, qui ne s'étudie pas du tout.
- si $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-x+2}{x^3-3x^2+3x-2}$, alors, en notant D le dénominateur de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'_{13}(x) &= \frac{(3x^2+4x-1)(2x^3-3x^2+x)-(6x^2-6x+1)(x^3+2x^2-x+3)}{D^2} \\ &= \frac{6x^5-x^4-11x^3+7x^2-x-6x^5-6x^4+17x^3-26x^2+19x-3}{D^2} \\ &= \frac{-7x^4+6x^3-19x^2+18x-3}{D^2} \end{aligned}$$

Inutile d'essayer d'étudier cette horreur.

- si $f(x) = \sqrt{x}\ln(x)e^x$, alors $f'(x) = \dfrac{\ln(x)e^x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\ln(x)e^x = \dfrac{e^x}{2\sqrt{x}}(\ln(x)+2+2x\ln(x))$, qui ne s'étudie pas bien (ceux qui ont du temps à perdre vérifieront en dérivant une deuxième fois que la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- si $f(x) = x^{\ln(x)} = e^{(\ln(x))^2}$, alors $f'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}e^{(\ln(x))^2}$. La fonction est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, décroissante sur $]0,1]$ et croissante ensuite, et admet un minimum en 1 de valeur $f(1)=1$.
- si $f(x) = 3^{x^2-1} = e^{(x^2-1)\ln(3)}$, alors $f'(x) = 2x\ln(3)e^{(x^2-1)\ln(3)}$. La fonction est définie sur $\mathbb{R}$, décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec pour minimum $f(0) = \dfrac{1}{3}$ (ce qu'on obtient très facilement sans calculer de dérivée).
- si $f(x)\sqrt{2(\ln(x))^2+\ln(x^2)-3\ln(x)} = \sqrt{2\ln^2(x)-\ln(x)}$, alors $f'(x) = \dfrac{\frac{4\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}}{2\sqrt{2\ln^2(x)-\ln(x)}} = \dfrac{4\ln(x)-1}{2x\sqrt{2\ln^2(x)-\ln(x)}}$. La fonction f est définie sur $]0,1]\cup[\sqrt{e},+\infty[$, elle est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[\sqrt{e},+\infty[$ (la valeur dénnulation du numérateur de la dérivée n'est pas dans le domaine de définition).
- si $f(x) = (1-2x)\sqrt{1-x^2}$, alors $f'(x) = -2\sqrt{1-x^2}+(1-2x)\times\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-2(1-x^2)-x(1-2x)}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{4x^2-x-2}{\sqrt{1-x^2}}$. La fonction f est définie sur $[-1,1]$, et sa dérivée s'annule deux fois sur cet intervalle.