# AP n°10 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

10 juin 2016

## Séries

- La série $\sum u_n$ est à termes positifs, il suffit de montrer qu'elle est majorée pour prouver sa convergence. Or, $u_n \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} x^n\ dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$ (on peut faire large, ça suffira). On en déduit que $\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$, qui converge (vers 2). Notre série converge donc. Pour le calcul de la somme, commençons par intervertir la somme (partielle) et l'intégrale : $\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{1+x}\ dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)(1+x)} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{1-x^2}\ dx$. Or, on prouve facilement que $0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{1-x^2}\ dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} x^{n+1}\ dx = \frac{1}{n+2}$ tend vers 0. On en déduit donc que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\ dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}\ dx = \frac{1}{2}[\ln(1+x) - \ln(1-x)]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\ln(3)}{2}$.
- Pour la convergence, il suffit de constater que $\frac{n-10}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^2}$, ce qui est le terme général d'une série convergente. Pour calculer la somme, commençons par effectuer une décomposition en éléments simples : $\frac{n-10}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$. En utilisant la technique du « on multiplie par $n$ puis on pose $n = 0$ », on trouve $a = \frac{-10}{1 \times 2} = -5$. De même, en multipliant par $n+1$ et en posant $x = -1$, on aura $b = \frac{-11}{-1} = 11$, puis enfin (même technique) $c = \frac{-12}{-2 \times (-1)} = -6$. Autrement dit, $\frac{n-10}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{5}{n} + \frac{11}{n+1} - \frac{6}{n+2}$. On peut désormais calculer et télescoper la somme partielle de notre série (définie à partir de $n = 1$) : $\sum_{k=1}^{n} -\frac{5}{k} + \frac{11}{k+1} - \frac{6}{k+2} = -5\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 11\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - 6\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} = -5 - \frac{5}{2} + \frac{11}{2} + \frac{11}{n+1} - \frac{6}{n+1} - \frac{6}{n+2} = -2 + \frac{5}{n+1} - \frac{6}{n+2}$. Le passage à la limite ne pose aucun problème : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-10}{n(n+1)(n+2)} = -2$.
- Puisqu'on ne demande que la nature, un équivalent suffira, on peut par exemple écrire $2\ln(n^3 + 1) - 3\ln(n^2+1) = 2\ln\left(n^3\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)\right) - 3\ln\left(n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right) = 6\ln(n) + 2\ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) - 6\ln(n) - 3\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{3}{n^2}$, qui est le terme général d'une série convergente. Notre série converge donc également.
- Pour la nature, on peut se contenter de dire que $\left|\frac{\sin(n)}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$, ce qui prouve que notre série est

absolument convergente, et donc convergente. Pour le calcul, le plus simple est de passer par les complexes (toutes les séries intervenant dans le calcul sont bien convergentes) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(k)}{2^k} = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{ik}-e^{-ik}}{2^k} = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{e^i}{2}\right)^k - \left(\frac{e^{-i}}{2}\right)^k = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-\frac{e^i}{2}} - \frac{1}{1-\frac{e^{-i}}{2}}\right) = \frac{i}{2-e^{-i}} - \frac{i}{2-e^i} = \frac{i(2-e^i-2+e^{-i})}{4-2e^i-2e^{-i}+1} = \frac{i\times 2i\sin(-1)}{5-2\cos(1)} = \frac{2\sin(1)}{5-2\cos(1)}$ (valeur complètement horrible, soit dit en passant).

- Ici, une comparaison série-intégrale s'impose. Les conditions du théorème sont facilement vérifiées, et $\displaystyle\int_2^n \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,dx = \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_2^n = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n)}$, qui converge quand $n$ tend vers $+\infty$. Notre série est donc également convergente.

## Variables aléatoires

1. Notons $X_1$ le nombre de Piles obtenus par le joueur 1, et $X_2$ le nombre de Piles obtenus par le joueur 2. On sait que $X_1$ et $X_2$ suivent des lois binômiales de paramètre $\left(n, \frac{1}{2}\right)$. On aura donc $P(X_1 = k) = P(X_2 = k) = \displaystyle\binom{n}{k}\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{n-k}} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$. Puisqu'il y a indépendance, on peut affirmer que $P((X_1 = k) \cap (X_2) = k) = \dfrac{\binom{n}{k}^2}{2^{2n}}$ (on multiplie par elle-même la probabilité précédente). Or, les deux joueurs vont obtenir le même nombre de Piles si et seulement l'un des événements $(X_1 = k) \cap (X_2 = k)$ est réalisé, et tous ces événements (pour $k$ variant entre 0 et $n$) sont incompatibles. La probabilité recherchée vaut donc $\displaystyle\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$ (on utlise la formule de Vandermonde pour démontrer ce dernier résultat, ou la fin du dernier exercice du TD11).
2. (a) Il y a $6^2 = 36$ tirages possibles. Parmi ceux-ci, il y en a 6 pour lesquels on aura tiré deux fois le même numéro, ce qui donne $P(X = -1) = \frac{1}{6}$. Parmi les 30 tirages restants, il y en a exactement la moitié pour lesquels le premier numéro tiré est plus gros que le deuxième (et l'autre moitié pour laquelle c'est le contraire), soit $P(X = -2) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$. Enfin, il faut répartir les 15 tirages restants suivant l'écart entre les deux numéros tirés. Il y en a cinq pour lesquels $b - a = 1$ (12, 23, 34, 45 et 56), donc $P(X = 0) = \frac{5}{36}$. Il n'y en a plus que quatre avec $b - a = 2$ (13, 24, 35 et 46), donc $P(X = 1) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. De même, on trouve $P(X = 2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, $P(X = 3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, et enfin $P(X = 4) = \frac{1}{36}$. Résumons tout ceci dans un joli tableau :

| $k$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $\frac{15}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

On calcule alors $E(X) = \dfrac{-30-6+4+6+6+4}{36} - \dfrac{16}{36} = -\dfrac{4}{9}$. De même, on calcule $E(X^2) = \dfrac{60+6+4+12+18+16}{36} = \dfrac{116}{36} = \dfrac{29}{9}$. Appliquons la formule de König-

Huygens pour trouver $V(X) = \frac{29}{9} - \frac{16}{81} = \frac{245}{81}$.

(b) On généralise assez facilement les résultats de la question précédente. On aura toujours $P(X = -1) = \frac{1}{n}$, et les cas restants se séparent de façon équitable entre $X = -2$ et les autres valeurs, ce qui donne $P(X = -2) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$. Ensuite, il y a exactement $n - k - 1$ cas pour lesquels $X = k$ si $k \in \{0, \dots, n-2\}$. On peut résumer les résultats dans le tableau suivant :

| $k$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $\dots$ | $n-3$ | $n-2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = k)$ | $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{n-1}{n^2}$ | $\frac{n-2}{n^2}$ | $\dots$ | $\frac{2}{n^2}$ | $\frac{1}{n^2}$ |

On peut alors calculer $E(X) = -2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k(n-k-1)}{n^2} = -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-2} nk - k^2 - k$. On connait par coeur nos formules pour les sommes classiques, on calcule donc $E(X) = -1 + \frac{1}{n^2}\left((n-1) \times \frac{(n-2)(n-1)}{2} - \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}\right) = -1 + \frac{(n-1)(n-2)(3(n-1) - (2n-3))}{6n^2} = -1 + \frac{(n-1)(n-2)}{6n} = \frac{n^2 - 9n + 2}{6n}$. Cette espérance est positive si et seulement si $n^2 - 9n + 2 > 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 81 - 8 = 73$, et admet pour racines $n_1 = \frac{9 - \sqrt{73}}{2}$ (qui est plus petit que 1), et $n_2 = \frac{9 + \sqrt{73}}{2}$ (qui est un peu plus petit que 9). L'espérance sera donc positive lorsque $n \geq 9$.

Pour le calcul de variance, il faut être motivé : $E(X^2) = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k^2(n-k-1)}{n^2} = 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-2}(n-1)k^2 - k^3 = 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{(n-2)(n-1)^2(2n-3)}{6} - \frac{(n-2)^2(n-1)^2}{4}\right) = 2 - \frac{1}{n} + \frac{(n-2)(n-1)^2(2(2n-3) - 3(n-2))}{12n^2} = 2 - \frac{1}{n} + \frac{(n-2)(n-1)^2}{12n}$. On en déduit que $V(X) = 2 - \frac{1}{n} + \frac{(n-1)(n-2)^2}{12n} - \frac{(n^2 - 9n + 2)^2}{36n^2}$

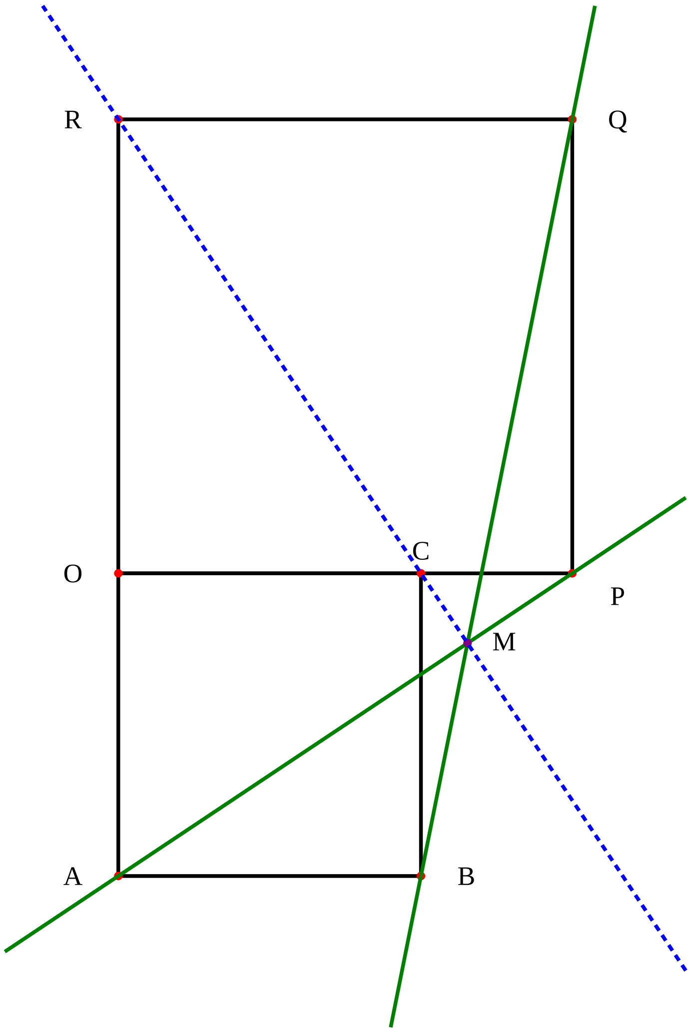
$= \frac{18n^2 - 36n + (3n^2 - 3n)(n^2 - 4n + 4) - (n^4 + 81n^2 + 4 - 18n^3 + 4n^2 - 36n)}{36n^2}$

$= \frac{2n^4 + 3n^3 - 43n^2 - 12n - 4}{36n^2}$. Bon, ça n'a aucun intérêt d'aller plus loin.

(c) D'après la loi obtenue plus haut, la probabilité que le joueur gagne de l'argent vaut (en passant par le complémentaire) $A = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} - \frac{n-1}{n^2} = \frac{n^2 - n - 2(n-1)}{2n^2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{2n^2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2}$. On est ensuite dans une situation classique de loi binômiale : $Y_p \sim \mathcal{B}(p, A)$, et en particulier $E(Y_p) = pA = \frac{p(n-1)(n-2)}{2n^2}$. De plus, $1 - A = \frac{n^2 + 3n - 2}{2n^2}$ (ça ne se factorise pas bien), donc $V(Y_p) = pA(1-A) = \frac{p(n-1)(n-2)(n^2 + 3n - 2)}{4n^4}$.

## Géométrie

1. Voilà :




2. On a facilement $O(0,0)$, $P(1,0)$, $Q(1,1)$ et $R(0,1)$. Le point $C$ étant sur l'axe des abscisses, on peut noter ses coordonnées sous la forme $C(c,0)$ (avec accessoirement $c \in [0,1]$). On en déduit alors $A(0,-c)$ et $B(c,-c)$. Pour déterminer les coordonnées du point $M$, on va chercher des équations des deux droites dont il est intersection. Un point $Z(x,y)$ appartient à la droite $(AP)$ si $\det(\overrightarrow{AZ},\overrightarrow{AP}) = 0$, soit $cx - (y+c) = 0$, ou encore $cx - y - c = 0$. De même, $Z(x,y)$ appartient à la droite $(BQ)$ si $\det(\overrightarrow{BZ},\overrightarrow{BQ}) = 0$, soit $(c+1)(x-c) - (1-c)(y+c) = 0$, ou encore $(1+c)x - (1-c)y - 2c = 0$. Si ces deux équations sont vérifiées simultanément, alors $y = cx - c$, donc $(1+c)x - (1-c)cx + c(1-c) - 2c = 0$, soit $x = \dfrac{c+c^2}{1+c^2}$. On en déduit $y = cx - c = \dfrac{c^2+c^3-c-c^3}{1+c^2} = \dfrac{c^2-c}{1+c^2}$, soit $M\left(\dfrac{c+c^2}{1+c^2}, \dfrac{c^2-c}{1+c^2}\right)$.

3. Il suffit de calculer $\det(\overrightarrow{RC},\overrightarrow{RM}) = c \times \dfrac{-c-1}{1+c^2} + \dfrac{c+c^2}{1+c^2} = 0$. Les trois points sont bien alignés.

4. Oui, ça marche encore. Si on veut le prouver rigoureusement, on recommence tous les calculs avec des paramètres supplémentaires : $O(0,0)$, $P(1,0)$, $Q(1,a)$, $R(0,a)$, $C(c,0)$, $B(c,-b)$, $A(0,-b)$. On trouve pour la droite $(AP)$ l'équation $bx - y - b = 0$ (même calcule que ci-dessus), et pour la droite $(BQ)$ l'équation $(a+b)x + (c-1)y - b - ac = 0$ (toujours la même techinque).

On trouve alors pour $M$ les coordonnées suivantes : $x = \dfrac{c(a+b)}{a+bc}$ et $y = \dfrac{ab(c-1)}{a+bc}$. Il reste à calculer $\overrightarrow{CR}(-c, a)$, et $\overrightarrow{RM}\left(\dfrac{c(a+b)}{a+bc}, \dfrac{-a(a+b)}{a+bc}\right)$, dont le déterminant est facilement nul.