AP n°10

PTSI B Lycée Eiffel

10 juin 2016

Séries

- On note $u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x}\, dx$. Montrer que $\sum u_n$ converge, puis calculer sa somme.
- Convergence et somme de $\sum \frac{n-10}{n(n+1)(n+2)}$.
- Nature de la série de terme général $u_n = 2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1)$ (on ne demande pas la somme).
- Nature et somme de la série $\sum \frac{\sin(n)}{2^n}$.
- Nature de la série de terme général $\frac{1}{n(\ln(n))^2}$.

Variables aléatoires

1. Deux joueurs lancent n fois chacun une pièce de monnaie équilibrée. Calculer la probabilité qu'ils obtiennent exactement autant de Piles.
2. On dispose d'une urne contenant n boules numérorées de 1 à n. Un joueur joue une partie du jeu suivant : il mise un euro, puis on tire une première boule dans l'urne (notons son numéro a), puis une deuxième (avec remise), dont on note le numéro b. Si $a < b$ le joueur gagne $b-a$ euros (moins celui qu'il a misé) ; si $a > b$, il perd un euro en plus de celui misé. Si $a = b$, il perd uniquement l'euro initialement misé.
   (a) On suppose que $n = 6$, donner la loi de la variable aléatoire X égale au gain du joueur sur une partie, et calculer $E(X)$ et $V(X)$.
   (b) Dans le cas général, calculer $E(X)$, et déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance est positive. Calculer également $V(X)$.
   (c) Un joueur effectue p parties successives de ce jeu (avec n quelconque). On note Y_p le nombre de parties où il obtient gagne de l'argent. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_p.

Géométrie

Dans le plan, on considère un carré $OPQR$, et un point C appartenant au segment $[OP]$. On construit alors un deuxième carré $OCBA$ extérieur au premier carré. On note enfin M le point d'intersection des droites (AP) et (BQ).

1. Faire une figure.
2. On se place dans le repère $(O, \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OR})$. Donner les coordonnées de tous les points de la figure (on pourra utiliser un paramètre pour une des coordonnées).
3. Montrer que les points M, C et R sont alignés.
4. Ces trois points sont-ils encore alignés si les deux figures initiales sont des rectangles au lieu d'être des carrés ?