Chapitre 19 : Variables aléatoires

PTSI B Lycée Eiffel

21 mai 2015

Un mèdecin annonce à un de ses patients :
« J'ai une bonne et une mauvaise nouvelle, je commence par la mauvaise.
Vous avez une maladie grave dont on ne guérit qu'avec une probabilité $\frac{1}{10}$*. »*
« Et la bonne nouvelle docteur ? »
« Mes neuf derniers patients sont morts... »

Introduction

Pour introduire cette nouvelle notion, absolument fondamentale en probabilités (tellement d'ailleurs que vous n'entendrez plus parler que de ça jusqu'à la fin de l'année, à peu de choses près), prenons un exemple très classique : on lance simultanément (ou successivement, ça ne change pas grand chose) quatre pièces équilibrées. L'univers Ω des résultats de l'expérience est un ensemble à $2^4 = 16$ éléments constitué des suites de quatre Pile ou Face. On peut naturellement déjà se poser plein de questions concernant cet univers, mais il arrive qu'on ait envie de considérer des résultats qui ne sont pas directement ceux de l'expérience. Par exemple, on veut étudier plus particulièrement le nombre de Piles obtenus lors de ces quatre lancers de pièces. Ce nombre de Piles est un entier directement associé au résultat de l'expérience (si vous connaissez le résultat, vous connaissez le nombre de Piles). Eh bien, une variable aléatoire, c'est exactement ça : une application qui, à chaque élément de Ω, associe un nombre réel.

Objectifs du chapitre :

- être capable d'appliquer ses connaissances en dénombrement pour déterminer correctement la loi d'une variable aléatoire.
- maitriser les techniques de calcul de l'espérance et de la variance.
- savoir repérer sans hésitation les variables aléatoires suivant une loi binômiale, et celles qui n'en suivent pas une.

1 Variables aléatoires finies

Comme dans les chapitres précédents, on se contentera de travailler sur des univers finis dans tout ce chapitre.

1.1 Définition, notations

Définition 1. Soit Ω un univers. Une **variable aléatoire** (réelle) X sur Ω est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Remarque 1. On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X (qui est bien l'image de l'ensemble Ω par l'application X).

Exemple 1 : On lance deux dés, et on note X la somme des résultats obtenus sur les deux dés. On aura $X(\Omega) = \{2, 3, \ldots, 12\}$.
Exemple 2 : Dans l'exemple explicité en introduction (lancers de quatre pièces équilibrées), en notant X le nombre de Piles obtenus, X est une variable aléatoire, et $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.
Exemple : L'application qui à chaque français associe sa taille est une variable aléatoire sur l'ensemble de la population française. On a ici $X(\Omega) \subset [0; 3]$ (j'ai pris large).

Définition 2. Soit X une variable aléatoire sur un univers Ω. On note habituellement $X = x$, l'événement $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$. On utilisera de même la notation $X \leqslant x$ pour l'événement $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leqslant x\}$ (et $X \geqslant x$; $X < x$ et $X > x$ pour des évèvements similaires).

Exemple : Ainsi, si on reprend l'exemple du lancer de quatre pièces (et toujours avec X le nombre de Piles), on pourra écrire $P(X = 1) = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$ (il y a quatre cas sur les 16 possibles pour lesquels on obtient un seul Pile), ou encore $P(X \geqslant 3) = \dfrac{5}{16}$ (cinq cas valables sur 16).

Proposition 1. Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même univers Ω, alors $X + Y$, XY, λX (où λ est un réel quelconque), $\max(X, Y)$ et $\min(X, Y)$ sont également des variables aléatoires.

Pas de démonstration, c'est évident, ce sont aussi des applications de Ω dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2. Soit X une variable aléatoire sur Ω et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $X(\Omega) \subset \mathcal{D}_g$, alors $g(X) : \omega \mapsto g(X(\omega))$ est aussi une variable aléatoire (notée $g(X)$).

Exemple : Si X est une variable aléatoire, X^2 en est également une.

1.2 Loi d'une variable aléatoire

L'intérêt des variables aléatoires est bien entendu d'étudier la probabilité d'apparition de chacun des résultats possibles :

Définition 3. Soit X une variable aléatoire, la **loi de probabilité** de X est la donnée des probabilités $P(X = k)$, pour toutes les valeurs k prises par X (c'est-à-dire pour $k \in X(\Omega)$).

Remarque 2. Pour calculer la loi d'une variable aléatoire, il suffit donc de déterminer toutes les valeurs qu'elle peut prendre, puis calculer la probabilité de chaque résultat. On présente souvent les résultats sous forme d'un tableau, comme nous allons le faire en reprenant nos deux premiers exemples cités plus haut.

Exemple 1 : Pour le lancer de deux dés, la somme aura pour loi :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Exemple 2 : Reprenons notre exemple du nombre de Piles sur quatre lancers de pièces. On peut présenter la loi de X sous la forme d'un tableau :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Proposition 3. Les événements $(X = k)_{k \in X(\Omega)}$ forment un système complet d'événements. On a donc $\sum\limits_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$.

Démonstration. Ces événements sont incompatibles (on ne peut pas avoir à la fois $X(\omega) = k$ et $X(\omega) = k'$ pour des valeurs différentes de k et k'). Leur réunion est bien Ω tout entier puisque chaque élément ω de Ω a une image par X. $\square$

Exemple 3 : Dans une urne se trouvent cinq jetons numérotés de 1 à 5. On en tire 3 simultanément et on note X le plus petit des trois numéros tirés. On a ici $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$ (si on tire trois jetons, le plus petit ne peut pas être plus grand que 3). Pour déterminer la loi, le plus simple est de dénombrer tous les cas possibles (il n'y en a que 10), même si on peut exprimer les probabilités à l'aide de coefficients binomiaux (par exemple, pour avoir $X = 1$, il faut tirer le jeton 1 puis deux autres parmi les 4 restants, soit $\binom{4}{2}$ tirages favorables sur les $\binom{5}{3}$). on obtient en tout cas :

k	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

1.3 Moments d'une variable aléatoire

Lorsqu'on s'intéresse à une variable aléatoire pouvant prendre un grand nombre de valeurs (et même dans les autres cas !), il peut être intéressant de donner, en plus de la loi de la variable qui ne sera pas toujours une donnée très lisible, des caractéristiques d'ensemble de cette loi, comme la moyenne des valeurs prises (pondérées par leur probabilité d'apparition). Ces paramètres sont les mêmes que ceux qu'on étudie en statistiques, nous allons plus particulièrement nous intéresser à l'espérance (qui n'est autre que la moyenne évoquée plus haut, c'est un paramètre de position) et à l'écart-type (paramètre de dispersion, qui mesure la répartition des valeurs autour de l'espérance).

1.3.1 Espérance

Définition 4. L'**espérance** d'une variable aléatoire X est définie par la formule

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$$

Remarque 3. Il s'agit bel et bien d'un calcul de moyenne avec coefficients égaux à $P(X = k)$, la somme des coefficients valant ici 1.

Exemple 1 : On calcule un peu laborieusement l'espérance de la somme de nos deux chiffres lors du lancer de dés : $E(X) = \dfrac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36} = \dfrac{252}{36} = 7$. Ce résultat tout simple vous semble logique ? On reviendra dessus un peu plus loin.
Exemple 2 : Reprenons l'exemple de quatre lancers de pièce, où X était le nombre de Pile obtenu. On aura $E(X) = 0 \times \dfrac{1}{16} + 1 \times \dfrac{4}{16} + 2 \times \dfrac{6}{16} + 3 \times \dfrac{4}{16} + 4 \times \dfrac{1}{16} = 2$. Le résultat est bien conforme à l'intuition qu'on a de la moyenne de la variable aléatoire X.
Exemple 3 : Pour nos cinq jetons dans l'urne, l'espérance vaut $E(X) = \dfrac{3+12+30}{10} = 4.5$. Tout ce qu'on peut constater c'est que c'est cohérent puisque l'espérance se situe entre les valeurs extrêmes prises par la variable X.

Définition 5. Soit A un évènement inclus dans notre univers Ω. On appelle **variable indicatrice de l'évènement** A, et on note $\mathbf{1}_A$, la variable aléatoire définie par $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$, et $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ sinon.

Proposition 4. La variable aléatoire constante $X : \omega \mapsto a$, $a \in \mathbb{R}$, a une espérance $E(X) = a$. L'espérance d'une variable aléatoire indicatrice $\mathbf{1}_A$ vaut $P(A)$.

Démonstration. C'est bien parce que je suis consciencieux que je fais une preuve. Dans le premier cas, la loi de X est simple : a avec probabilité 1. On a donc $E(X) = 1 \times a = a$ en appliquant la définition de l'espérance. Dans le second, la loi de $\mathbf{1}_A$ est à peine plus compliquée, 1 si $\omega \in A$

c'est-à-dire avec probabilité $P(A)$ et 0 sinon, donc avec probabilité $1 - P(A)$. L'espérance vaut bien $P(A)$. $\square$

Proposition 5. Linéarité de l'espérance.
Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω, et a, b deux réls, on a $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$. En particulier, on aura toujours $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$; $E(aX) = aE(X)$, ou encore en utilisant l'espérance d'une variable constante calculée plus haut, $E(X + b) = E(X) + b$.

Démonstration. La preuve est un peu formelle et sera esquivée cette année. $\square$

Exemple : Cette propriété très simple est mine de rien bien utile (c'est même la propriété fondamentale à maitriser sur l'espérance). On lance par exemple successivement 100 dés. On note X la somme des résultats obtenus. Calculer l'espérance directement demande un certain courage (la loi de X est une horreur absolue), mais on peut ruser ! Notons X_i la variable aléatoire donnant le résultat du lancer du dé numéro i. On peut constater que $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$. Or, toutes les variables X_i ont la même espérance, celle de la variable donnant le résultat d'un lancer de dé à six faces, qui vaut $\frac{7}{2}$. On a donc $E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{100}) = \frac{7}{2} + \cdots + \frac{7}{2} = 350$ (résultat intuitivement évident, soit dit en passant).

Définition 6. Une variable aléatoire X est dite **centrée** si $E(X) = 0$.

Proposition 6. Si X est une variable aléatoire d'espérance m, la variable aléatoire $X - m$ est centrée. On l'appelle **variable aléatoire centrée associée à** X.

Démonstration. Par linéarité, $E(X - m) = E(X) - E(m) = m - m = 0$. $\square$

Proposition 7. Si X est une variable aléatoire positive (c'est-à-dire que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$), on a $E(X) \geqslant 0$. Si X, Y sont deux variables aléatoires telles que $X \leqslant Y$ (c'est-à-dire que $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant Y(\omega)$), alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Démonstration. C'est une fois de plus évident. Tous les termes intervenant dans le calcul de l'espérance de X étant positifs, la somme sera nécessairement positive. Pour la deuxième propriété, on peut utiliser une ruse classique : si $X \leqslant Y$, la variable aléatoire $Y - X$ est positive, donc $E(Y - X) \geqslant 0$. Or, $E(Y - X) = E(Y) - E(X)$, ce qui nous donne l'inégalité voulue. $\square$

Théorème 1. (théorème du transfert) Soit X une variable aléatoire et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, alors on a $E(g(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k) P(X = k)$.

Démonstration. On admettra ce résultat qui est un peu technique à prouver. C'est évident dans le cas où les images par g des valeurs k sont distinctes, mais un peu plus pénible à rédiger dans le cas général. $\square$

Exemple : Si on cherche à calculer $E(X^2)$, il suffit de faire le calcul de somme suivant : $\displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} k^2 P(X = k)$ (autrement dit, on élève les valeurs au carré et on ne touche pas aux probabilités).

1.3.2 Moments d'ordre supérieur

Définition 7. Soit X une variable aléatoire et r un entier strictement positif, le **moment d'ordre** r de X, noté $m_r(X)$, est l'espérance de la variable aléatoire X^r. Autrement dit (en utilisant le théorème du transfert) $m_r(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^r P(X = k)$.

Remarque 4. Le moment d'ordre 1 de X n'est autre que l'espérance de X.

Définition 8. La **variance** $V(X)$ d'une variable aléatoire X est le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire centrée associée à X. Autrement dit, $V(X) = E((X-E(X))^2)$. L'écart-type σ de la variable aléatoire X est défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Que représente cette variance ? Il s'agit, techniquement, d'une moyenne de carrés d'écarts à la moyenne. Pourquoi prendre le carré ? Tout simplement car la moyenne des écarts à la moyenne est nulle. Pour réellement mesurer ces écarts, il faut « les rendre positifs », ce qui se fait bien en les élevant au carré. On pourrait également penser à prendre leur valeur absolue, mais cela aurait moins de propriétés intéressantes pour le calcul. Par contre, pour « effacer »la mise au carré, on reprend ensuite la racine carrée du résultat obtenu pour définir l'écart-type. L'écart-type représente donc (comme son nom l'indique) un écart moyen entre les valeurs prises par X et la moyenne de X (plus il est grand, plus les valeurs prises par X sont étalées).

Proposition 8. La variance d'une variable aléatoire est toujours positive.
On a la formule $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Démonstration. La première propriété découle immédiatement de la définition du moment d'ordre 2, qui est une somme de termes positifs. Pour la deuxième, c'est du calcul un peu formel. Il faut calculer l'espérance de $(aX + b - E(aX + b))^2$. Or, par linéarité de l'espérance, $E(aX + b) = aE(X) + b$ dont l'expression précédente vaut $(aX + b - aE(X) - b)^2 = a^2(X - E(X))^2$, dont l'espérance vaut $a^2E((X - E(X))^2) = a^2V(X)$. □

Remarque 5. Une variable aléatoire a une variance (et un écart-type) nulle si et seulement si elle est constante.

Théorème 2. Théorème de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Démonstration. C'est à nouveau un calcul très formel : $(X - E(X))^2 = X^2 - 2E(X)X + (E(X))^2$, donc, par linéarité de l'espérance, $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(E(X))^2 = E(X^2) - 2E(X)^2 + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$. □

Remarque 6. En pratique, c'est à peu près systématiquement via la formule de König-Huygens que nous effectuerons nos calculs de variance.

Définition 9. Une variable aléatoire est dite **réduite** si son écart-type (et donc sa variance) vaut 1.

Proposition 9. Si X est une variable aléatoire, la **variable aléatoire centrée réduite associée à** X est $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ (qui est, vous vous en seriez doutés, centrée et réduite).

Démonstration. On a déjà vu plus haut que $X - E(X)$ était centrée, la diviser par l'écart-type ne va pas changer cela. De plus, $V\left(\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right) = \left(\dfrac{1}{\sigma(X)}\right)^2 V(X) = 1$. □

Exemple 1 : Pour vous montrer qu'un calcul d'écart-type à la main est en général très fastidieux, prenons l'exemple classique du lancer de deux dés, où l'on note X la somme des deux chiffres obtenus. Un calcul pénible donne $E(X^2) = \dfrac{2^2 \times 1 + 3^2 \times 2 + \cdots + 12^2 \times 1}{36} = \dfrac{1974}{36}$ donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{35}{6}$. L'écart-type vaut donc $\sigma(X) \simeq \sqrt{\dfrac{35}{6}} \simeq 2.415$.

Exemple 2 : Dans le cas du lancer de quatre pièces, c'est moins affreux. On a $E(X^2) = \dfrac{4 + 24 + 36 + 16}{16} = \dfrac{80}{16} = 5$, donc $V(X) = 5 - 4 = 1$.

1.4 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 3. Inégalité de Bienaymé (Irénée-Jules) - Tchebychev (Pafnouti).
Soit X une variable aléatoire d'espérance m et d'écart-type σ, alors, pour tout réel strictement positif α, $P(|X-m| \geqslant) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2}$.

Démonstration. La preuve découle d'une autre inégalité connue sous le nom d'inégalité de Markov : si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ et $a > 0$, $P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$. C'est essentiellement évident : si ce n'était pas le cas, X prendrait des valeurs plus grandes que a avec une probabilité plus grande que $\dfrac{E(X)}{a}$, ce qui contribuerait à l'espérance pour une quantité plus grande que $E(X)$, ce n'est pas possible quand on n'ajoutera ensuite plus que des valeurs positives dans le calcul de l'espérance. Appliquons donc cette inégalité à la variable $(X-m)^2$, qui est positive, et à a^2. On sait que $E((X-m)^2) = V(X) = \sigma^2$, donc $P((X-m)^2 \geqslant a^2) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{a^2}$. Or, la probabilité de gauche est la même que celle de $|X-m| \geqslant a$, ce qui prouve Bienaymé-Tchebychev. □

Remarque 7. Cette inégalité permet de majorer la probabilité d'obtenir des valeurs éloignées de la moyenne pour une variable aléatoire (ce qui a notamment un lien avec la notion d'intervalle de confiance en statistiques), mais elle est hélas très imprécise, et ne donne pas de bons résultat en pratique sauf pour des valeurs réellement extrêmes de la variable aléatoire. En fait, son principal intérêt est de permettre de démontrer rapidement la loi faible des grandes nombres, mais cette dernière n'est pas à votre programme !

2 Lois usuelles finies

Certaines lois de probabilité interviennent suffisamment régulièrement lorsqu'on étudie des variables aléatoires dans des cas classiques (lancers de dés ou de pièces, tirages de boules dans des urnes, bref toutes les bêtises qu'on aime bien vous infliger dans les exercices de probas) pour qu'il soit intéressant de les étudier une bonne fois pour toutes (et accessoirement de leur donner un nom) et d'en retenir les caractéristiques (espérance et variance notamment). Nous en étudierons trois dans ce chapitre, et vous en verrez quelques autres l'an prochain (sur des univers infinis).

2.1 Loi uniforme

Exemple fondamental : Dans une urne se trouvent n boules numérotées de 1 à n. On en tire une au hasard et on note X le numéro obtenu.

Définition 10. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi uniforme sur** $\{1;\dots;n\}$, et on note $X \sim \mathcal{U}(\{1;\dots;n\})$, si $X(\Omega) = \{1;\dots;n\}$ et $\forall k \in \{1;\dots;n\}$, $P(X=k) = \dfrac{1}{n}$.

Proposition 10. Si $X \sim \mathcal{U}(\{1;\dots;n\})$, on a $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Démonstration. Pour l'espérance, on a $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$.

Pour la variance, on va utiliser la formule de König-Huygens. On a $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ donc $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{(n+1)^2}{4} = \dfrac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} = \dfrac{4n^2+6n+2-3n^2-6n-3}{12} = \dfrac{n^2-1}{12}$. □

Remarque 8. À partir d'une loi uniforme prenant ses valeurs entre 1 et n, on construit facilement une loi dont la probabilité est uniforme entre deux entiers m et p (il suffit d'ajouter une constante). La loi ainsi construite a une espérance égale à $\dfrac{m+p}{2}$ et une variance égale à $\dfrac{(m-p+1)^2-1}{12}$.

2.2 Loi de Bernoulli

Exemple fondamental : On lance une pièce mal équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut p et on note X la variable aléatoire valant 1 si on tombe sur Pile et 0 si on tombe sur face.

Définition 11. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** p (avec $p \in [0;1]$) si $X(\Omega) = \{0;1\}$; $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$. On le note $X \sim \mathcal{B}(1,p)$.

Remarque 9. Cette loi est aussi appelée loi indicatrice de paramètre p, puisqu'elle apparait essentiellement dans le cas où X est la variable aléatoire indicatrice d'un événement.

Proposition 11. Si $X \sim \mathcal{B}(1,p)$, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.

Démonstration. Pour l'espérance, on a déjà fait le calcul un peu plus haut. On a par ailleurs de la même façon $E(X^2) = p$, donc $V(X) = p - p^2 = p(1-p)$. □

Remarque 10. On utilise surtout en pratique des sommes de variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli, comme on a déjà pu le faire dans le cas du lancer successif de 90 dés.

2.3 Loi binômiale

Exemple fondamental : Une urne contient des boules blanches et noires, avec une proportion p de boules blanches (et donc une proportion $1-p$ de boules noires). On tire n boules **avec remise** dans l'urne et on note X le nombre de boules blanches obtenues.

Définition 12. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi binomiale de paramètre** (n,p) (avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$) si $X(\Omega) = \{0;\dots;n\}$ et $\forall k \in \{0;\dots;n\}$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On le note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Remarque 11. Si $n=1$, la loi binomiale de paramètre $(1,p)$ n'est autre que la loi de Bernoulli de paramètre p, ce qui justifie l'emploi de la même notation.

Remarque 12. Une autre façon de voir une loi binômiale est de considérer que la variable aléatoire correspondante compte le nombre de réussites quand on tente n fois de suite (de façon indépendante) un tirage ayant une probabilité p de réussir.

Proposition 12. Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$ (on note parfois $q = 1-p$, auquel cas on a $V(X) = npq$).

Démonstration. On a $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On aimerait bien appliquer le binome de Newton, mais il faut pour cela faire disparaitre le k, ce qui est par exemple possible grace à la formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ On a donc $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} n\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{j=0}^{j=n-1} p^{j+1}(1-p)^{n-1-j} = np(p+1-p)^{n-1} = np$.
Pour la variance, on ne va pas calculer $E(X^2)$ directement, mais passer par $E(X(X-1))$, ce qui va permettre d'utiliser la formule $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ (obtenue en appliquant deux fois de suite la formule utilisée dans le calcul précédent). Un calcul extrêmement similaire au précédent donne alors $E(X(X-1)) = n(n-1)p^2$, donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)+X) - E(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p)$ □

Remarque 13. La somme de n variables suivant chacun de façon indépendante une loi de Bernoulli de paramètre p sera toujours une variable binômiale de paramètre (n, p).