Chapitre 3 : Trigonométrie

PTSI B Lycée Eiffel

29 septembre 2014

Quel est le comble pour un cosinus ?
Attraper une sinusite !

Pour compléter le chapître précédent consacré aux fonctions usuelles, un chapître à part consacré à une catégorie de fonctions qu'il est tout aussi indispensable de connaitre sur le bout des doigts : les fonctions trigonométriques. On en profitera pour refaire le point sur l'interprétation géométrique des cosinus, sinus, et autres tangentes, qu'il faut absolument maîtriser pour être capable notamment de résoudre des équations trigonométriques efficacement. On profitera également de ce chapître pour appliquer nos connaissances sur les réciproques aux fonctions trigonométriques, pour ajouter à notre catalogue les trois fonctions trigonométriques réciproques.

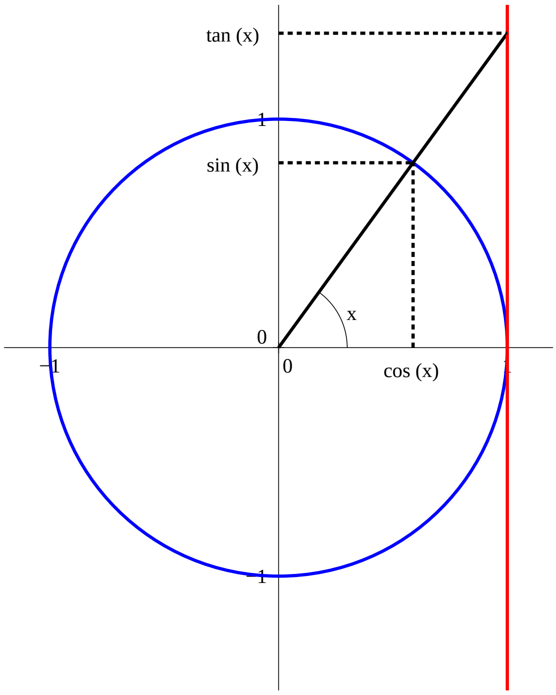
Objectifs du chapitre :

- capacité à utiliser un cercle trigonométrique rapidement.
- connaissance des multiples formules de trigonométrie, ou du moins capacité à toutes les retrouver rapidement.
- connaissance des dérivées et représentations graphiques des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques.

1 Rappels de trigonométrie

1.1 Cercle trigonométrique, radians

Définition 1. Le **cercle trigonométrique**, dans un repère orthonormé, est le cercle de centre O (origine du repère) et de rayon 1. À tout réel x, on associe un point M du cercle trigonométrique en parcourant le cercle sur une distance x à partir du point $(1, 0)$, et x est appelé **mesure en radians** de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$. L'abscisse et l'ordonnée du point M associé à x sont appelées respectivement **cosinus** et **sinus** de ce réel. On définit par ailleurs la **tangente** quand c'est possible, c'est à dire si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Pour une interprétation géométrique de la tangente (expliquant d'ailleurs le nom de tangente), cf le dessin ci-dessous.



Remarque 1. Le repérage du cercle trigonométrique suppose le choix d'une orientation sur ce cercle. On appelle sens trigonométrique (ou positif) le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre.

Proposition 1. Valeurs remarquables à connaitre :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\Vert$	0	$\Vert$

Démonstration. Pour les multiples de $\dfrac{\pi}{2}$, il suffit de regarder le cercle trigonométrique. Pour $\dfrac{\pi}{4}$, on obtient les valeurs facilement en se plaçant dans un demi-carré de côté 1 (en revenant à la définition purement géométrique du cosinus et du sinus dans les triangles rectangles, que vous avez vue au collège). La diagonale a pour longueur $\sqrt{2}$, donc le cosinus comme le sinus de chacun des deux angles de mesure $\dfrac{\pi}{4}$ valent $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Pour $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{6}$, on se place dans un demi-triangle équilatéral de côté 1. Les longueurs des trois côtés sont donc 1 ; $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (un petit coup de théorème de Pythagore), dont on déduit sans difficulté les valeurs des lignes trigonométriques. □

Proposition 2. Propriétés de symétrie du cosinus, du sinus et de la tangente :

- $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
- $\tan(x + 2\pi) = \tan x$
- $\tan(x + \pi) = \tan x$
- $\tan(-x) = -\tan x$
- $\tan(\pi - x) = -\tan x$
- $\tan(x + \frac{\pi}{2}) = -\dfrac{1}{\tan(x)}$
- $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$

Démonstration. C'est toujours une question de symétries du cercle trigonométrique : à $x+2\pi$ correspond le même point qu'à x ; à $x+\pi$ le symétrique par rapport à 0 ; à $-x$ le symétrique par rapport à l'axe des abscisses ; à $\pi - x$ celui par rapport à l'axe des ordonnées ; à $x + \frac{\pi}{2}$ l'image par une rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et enfin à $\frac{\pi}{2} - x$ l'image par la composée de cette rotation et de la symétrie par rapport à l'axe des abscisses (en commençant par la symétrie). □

1.2 Formules trigonométriques

Proposition 3. Pour tout réel x, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Démonstration. Soit M le point associé à x sur le cercle trigonométrique. La distance OM, qui vaut 1, est égale à $\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}$, ce qui élevé au carré donne notre égalité. □

Les formules suivantes sont toutes à connaitre parfaitement et surtout à ne pas confondre les unes avec les autres. Nous verrons un peu plus tard comment les retenir plus facilement à l'aide des exponentielles complexes.

Proposition 4. Formules d'addition :
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Démonstration. Soient M et N les points du cercle trigonométrique de coordonnées respectives $(\cos a, \sin a)$ et $(\cos(a+b), \sin(a+b))$ et M' l'image de M par rotation autour de l'origine d'angle $\frac{\pi}{2}$. Le triplet $(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ est un repère (orthonormal direct). Les coordonnées de N dans ce repère sont $(\cos b, \sin b)$ (puisque N appartient toujours au cercle trigonométrique dans ce nouveau repère, et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = a + b - a = b$), donc $\overrightarrow{ON} = \cos b\ \overrightarrow{OM} + \sin b\ \overrightarrow{OM'} = \cos b\ (\cos a \overrightarrow{i} + \sin a \overrightarrow{j}) + \sin b\ (-\sin a \overrightarrow{i} + \cos a \overrightarrow{j}) = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) \overrightarrow{i} + (\sin a \cos b - \cos a \sin b) \overrightarrow{j}$. Comme on sait par ailleurs, par définition du point N, que ces coordonnées sont égales à $(\cos(a+b), \sin(a+b))$, une petite identification donne les formules d'addition du sinus et du cosinus. On a ensuite $\tan(a+b) = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \dfrac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \dfrac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$. Pour obtenir les formules de soustraction, on reprend les formules précédentes en remplaçant b par $-b$. □

Méthode : Ces formules permettent de calculer les valeurs exactes des lignes trigonométriques d'angles qui peuvent s'exprimer comme sommes ou différences d'angles classiques, par exemple $\frac{\pi}{12}$: on utilise le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, donc $\cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. De même, $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Proposition 5. Formules de duplication :
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2 \cos a \sin a$
- $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$
- $\cos(3a) = 4\cos^3 a - 3\cos a$
- $\sin(3a) = 3\sin a - 4\sin^3 a$

Démonstration. Ce ne sont que des cas particuliers des formules d'addition, mais il est bon de bien les connaitre. Pour obtenir $\cos(3a)$, on applique la formule d'addition à a et $2a$: $\cos(3a) = \cos(2a)\cos a - \sin(2a)\sin a = 2\cos^3 a - \cos a - 2\cos a \sin^2 a = 2\cos^3 a - \cos a - 2\cos a(1-\cos^2 a) = 4\cos^3 a - 3\cos a$. □

Remarque 2. On peut calculer les valeurs de $\cos(na)$ et $\sin(na)$ de proche en proche de cette manière, mais on verra une méthode plus efficace utilisant les nombres complexes.

Proposition 6. Transformations de sommes en produits (et vice versa) :

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
- $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Démonstration. Rien de compliqué, par exemple $\cos(a+b) + \cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b = 2\cos a \cos b$. On obtient de même les deux formules suivantes, puis les quatre dernières s'obtiennent directement en partant du membre de droite et en utilisant les trois premières. □

1.3 Résolution d'équations trigonométriques

Définition 2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on dit qu'un réel x est **congru à α modulo θ** si $x = \alpha + k\theta$, où k est un entier relatif quelconque. On le note $x \equiv \alpha[\theta]$.

Exemple : On peut ainsi écrire $x \equiv \theta[2\pi]$ pour indiquer que le réel x correspond sur le cercle trigonométrique au même point que l'angle θ.

Remarque 3. On peut effectuer sur les congruences (qui ne sont rien d'autre que des égalités déguisées) les opérations suivantes : addition d'une constante des deux côtés (sans toucher à ce qui est dans le crochet), ou multiplication par une constante (y compris ce qui est dans le crochet). Ainsi, si $2x + \pi \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, on pourra écrire $2x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, puis $x \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$.

Proposition 7. L'équation $\cos(x) = \cos(\theta)$ a pour solutions $x \equiv \theta[2\pi]$ et $x \equiv -\theta[2\pi]$. L'équation $\sin(x) = \sin(\theta)$ a pour solutions $x \equiv \theta[2\pi]$ et $x \equiv \pi - \theta[2\pi]$.

Exemples : L'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ a pour solutions $x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$. L'inéquation $\sin(x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solutions $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right][2\pi]$.

Exercice : Résoudre les équations suivantes :

1. $\cos(3x) = \frac{1}{2}$
2. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$
3. $\tan(x) = 2\cos(x)$
4. $\sin(x) + \sin(3x) = 0$

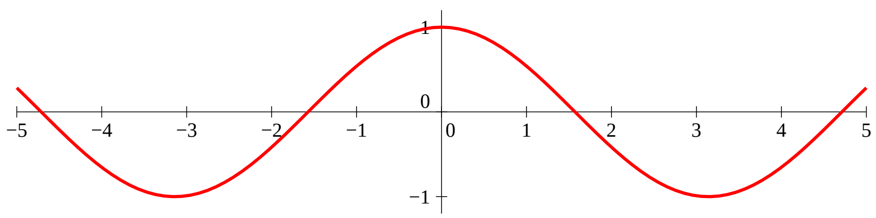
1. On écrit simplement $3x \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$, soit $x \equiv \pm\frac{\pi}{9}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$.
2. On peut par exemple écrire $x + \frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, soit $x \equiv 0[2\pi]$, ou encore utiliser le fait que $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ pour obtenir l'équation équivalente $\cos(x) = 1$ (qui donne évidemment les mêmes solutions).
3. Le plus simple est décrire $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 2\cos(x)$, soit $\sin(x) = 2\cos^2(x) = 2 - 2\sin^2(x)$. En posant $X = \sin(x)$, on se ramène donc à l'équation $2X^2 + X - 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 16 = 17$, et admet comme racines $X_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$, qui est strictement inférieure à -1 (puisque $\sqrt{17} > 4$) donc n'est pas une valeur valable pour un sinus, et $X_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$, qui appartient bien à $[-1, 1]$. Il existe donc un angle θ tel que $\sin(\theta) = X_2$, et les solutions de l'équation initiale sont alors $x \equiv \theta[2\pi]$ et $x \equiv \pi - \theta[2\pi]$.
4. Une possibilité brutale est d'écrire $\sin(x) + \sin(3x) = \sin(x) + 3\sin(x) - 4\sin^3(x) = 4\sin(x)(1 - \sin^2(x))$, les solutions vérifient donc $\sin(x) = 0$, $\sin(x) = 1$ ou $\sin(x) = -1$, ce qui donne $x \equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$. Autre possibilité, utiliser une formule de transformation somme-produit pour ramener l'équation à $2\sin(2x)\cos(-x) = 0$, soit $\sin(2x) = 0$ ou $\cos(x) = 0$ (la fonction cos étant paire). Comme $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, on doit en fait avoir $\sin(x) = 0$ ou $\cos(x) = 0$, ce qui donne bien les solutions trouvées ci-dessus.

2 Fonctions trigonométriques

Proposition 8. La fonction **cosinus** est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos(x)$. Elle est paire et 2π-périodique, continue et dérivable, et sa dérivée est égale à $-\sin(x)$. Sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$, son tableau de variations est le suivant :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

La courbe bien connue du cosinus :

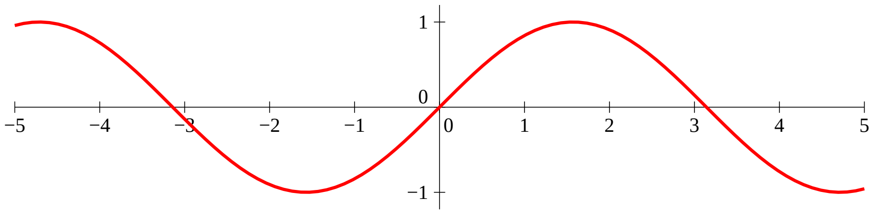


Démonstration. La périodicité et la parité découlent des propriétés $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\cos(-x) = \cos x$. Le calcul de dérivée peut s'effectuer en revenant au taux d'accroissement et en utilisant des encadrements exploitant la définition géométrique des lignes trigonométriques, nous verrons cette démonstration en exercice. □

Proposition 9. La fonction **sinus** est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin(x)$. Elle est impaire, 2π-périodique, continue et dérivable, sa dérivée est la fonction cosinus, et voici son tableau de variations sur $[-\pi; \pi]$:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	-1	0	1	0

Et une autre courbe bien connue :

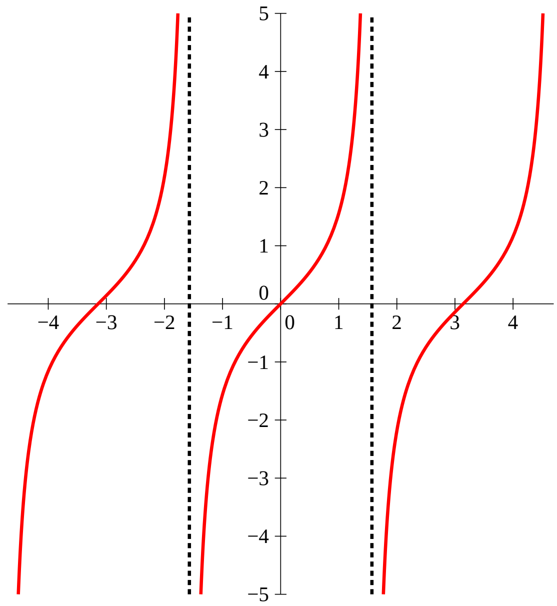


Démonstration. Mêmes remarques que pour le cosinus. □

Proposition 10. La fonction **tangente** est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ par $x \mapsto \tan(x)$. Elle est impaire, π-périodique, continue et dérivable sur son domaine de définition, et $\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$. D'où le tableau de variations suivant sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$-\infty$	0	$+\infty$

Et une dernière courbe peut-être moins bien connue :

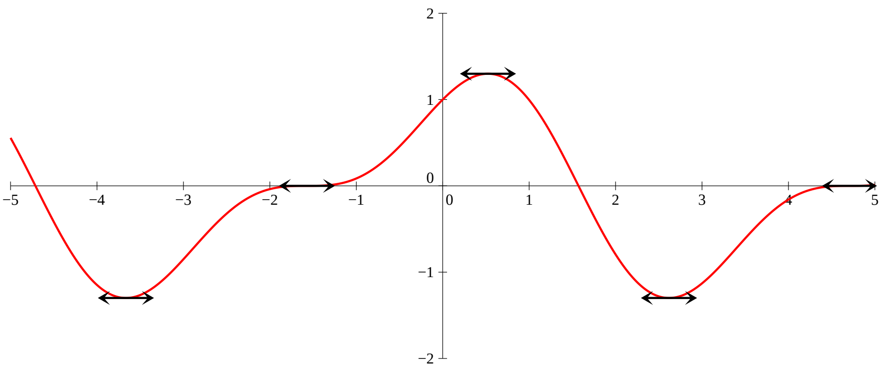


Démonstration. Encore une fois, tout a été vu sauf la dérivée et les limites, qui se calculent facilement. Par exemple, $\tan'(x) = \left(\dfrac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ en utilisant la formule de dérivation d'un quotient. Par ailleurs, $1+\tan^2(x) = 1+\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, d'où la deuxième forme possible. $\square$

Exercice : Étudier le plus complètement possible la fonction $f : x \mapsto \cos(x) + \dfrac{1}{2}\sin(2x)$.
La fonction est évidemment définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle n'est ni paire ni impaire, mais 2π-périodique, ce qui permet de réduire l'intervalle d'étude à $[-\pi, \pi]$. Sa dérivée est $f'(x) = -\sin(x) + \cos(2x) = -\sin(x) + 1 - 2\sin^2(x)$. En posant $X = \sin(x)$, $f'(x)$ est du signe de $-2X^2 - X + 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, et admet pour racines $X_1 = \dfrac{1-3}{-4} = \dfrac{1}{2}$, et $X_2 = \dfrac{1+3}{-4} = -1$. La dérivée est donc positive lorsque $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$, ce qui permet de dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f	-1	↗	0	↗	1	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	-1

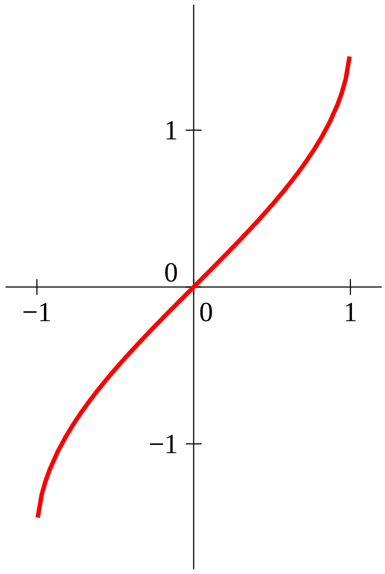
Pour compléter le tableau, on a notamment calculé $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ (calcul identique au signe près en $\dfrac{5\pi}{6}$, les autres valeurs sont faciles à calculer). On a également déterminé le signe de f en résolvant l'équation $f(x) = 0$: comme $\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$, elle se ramène à $\cos(x)(1+\sin(x)) = 0$, ce qui donne (sur notre intervalle) $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$. On peut conclure avec une belle courbe :



3 Fonctions trigonométriques réciproques

Définition 3. La fonction sin étant strictement croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, elle y est bijective vers l'intervalle image $[-1;1]$. La fonction réciproque du sinus sur cet intervalle est appelée **arcsinus** et notée arcsin.

Proposition 11. La fonction arcsin est impaire, définie et continue sur $[-1;1]$ et dérivable sur $]-1;1[$, de dérivée $\arcsin'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. Elle est strictement croissante sur son domaine de définition.

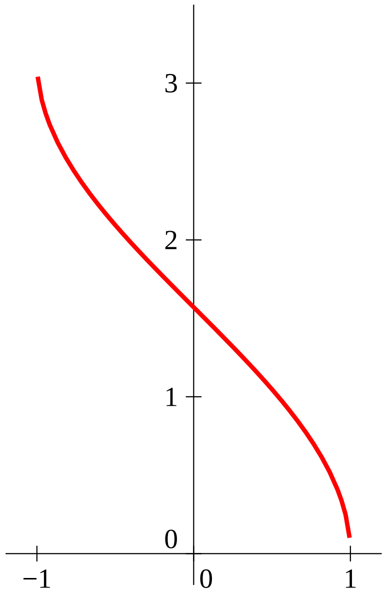


Démonstration. L'imparité et la croissance d'arcsin découlent de celles du sinus via le théorème de la bijection. Pour la dérivée, appliquons la formule de dérivation d'une réciproque : $\arcsin'(y) = \dfrac{1}{\sin'(\arcsin y)} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin y)}$. La fonction arcsin étant à valeurs dans $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, et le cosinus étant positif sur cet intervalle, on a $\cos(\arcsin y) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin y))} = \sqrt{1-y^2}$, ce qui prouve la formule. □

Remarque 4. Le fait que $\sin(\arcsin y) = y$, utilisé dans la démonstration, n'est vrai que si $y \in [-1;1]$ (sinon $\arcsin(y)$ n'existe pas). De même, $\arcsin(\sin(x)) = x$ seulement si $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ (mais cette expression est définie quelle que soit la valeur de x).

Définition 4. La fonction cos est strictement décroissante sur $[0;\pi]$, elle y est donc bijective vers son intervalle image $[-1;1]$. On définit la fonction **arccosinus** sur $[-1;1]$ (notée arccos) comme la réciproque de cos sur cet intervalle.

Proposition 12. La fonction arccos est paire, continue sur $[-1;1]$ et dérivable sur $]-1;1[$, de dérivée $\arccos'(y) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. Elle est strictement décroissante sur son domaine de définition.



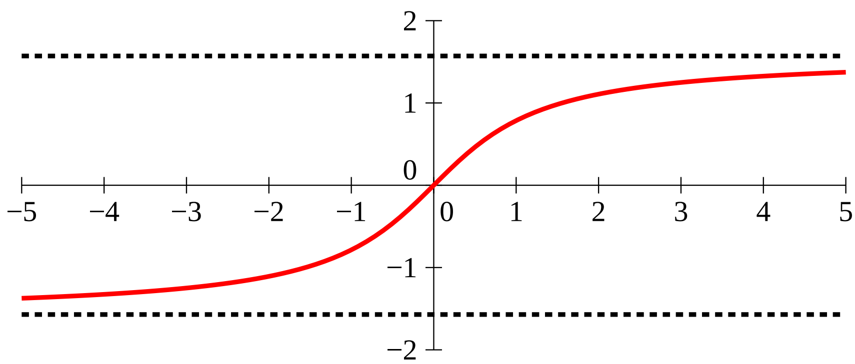
Démonstration. La preuve est totalement similaire à la précédente. $\square$

Proposition 13. Pour tout réel $y \in [-1;1]$, $\arccos(y) + \arcsin(y) = \dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration. Notons $g : y \mapsto \arccos(y) + \arcsin(y)$. La fonction g est définie sur $[-1;1]$, dérivable et de dérivée nulle sur $]-1;1[$. Elle est donc constante égale à $g(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \dfrac{\pi}{2} + 0 = \dfrac{\pi}{2}$. $\square$

Définition 5. La fonction tan est strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, elle y effectue donc une bijection vers son intervalle image $\mathbb{R}$. La fonction **arctangente** est définie sur $\mathbb{R}$ comme sa réciproque, on la note arctan.

Proposition 14. La fonction arctan est impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec pour limites respectives $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ en $-\infty$ et $+\infty$.



Démonstration. Comme d'habitude, contentons-nous du calcul de la dérivée, qui est ici facile : $\arctan'(y) = \dfrac{1}{\tan'(\arctan y)} = \dfrac{1}{(1+\tan^2)(\arctan y)} = \dfrac{1}{1+y^2}$. $\square$

Exercice : Démontrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \arctan(x)$.

Deux méthodes possibles, d'abord une méthode bourrine où on pose $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \arctan(x)$. Il faut déjà réussir à déterminer le domaine de définition de f. En constatant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant x^2 < x^2+1$, on peut prendre la racine carrée pour obtenir $|x| < \sqrt{x^2+1}$, soit $-\sqrt{x^2+1} < x < \sqrt{x^2+1}$. On a donc toujours $-1 < \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$, donc $\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ existe sur $\mathbb{R}$ tout entier. Comme la fonction arctan est également définie sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ également puisque l'expression à l'intérieur de l'arcsinus ne prend jamais les valeurs -1 et 1. Dérivons donc : $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}} - \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \times \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1-x^2}} - \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{1}{x^2+1} = 0$. La fonction f est donc constante. Comme $f(0) = \arcsin(0) - \arctan(0) = 0$, f est la fonction nulle, ce qui prouve l'égalité demandée.

Deuxième méthode, on pose $x = \tan(\theta)$, avec $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ (on peut toujours, la focntion tan étant bijective de cet intervalle sur $\mathbb{R}$. On a bien évidemment $\arctan(\tan(\theta)) = \theta$ sur cet intervalle (ce ne serait pas vrai pour un θ quelconque), et par ailleurs $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\tan(\theta)}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}} = \tan(\theta)\sqrt{\cos^2(\theta)}$. Comme $\cos(\theta)$ est positif sur l'intervalle considéré, $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \tan(\theta)\cos(\theta) = \sin(\theta)$. Et comme on est justement dans l'intervalle où $\arcsin(\sin(\theta)) = \theta$ (la vie est bien faite), on trouve $\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \theta$, ce qui prouve l'égalité.