Chapitre 21 : Séries numériques

PTSI B Lycée Eiffel

9 juin 2015

L'homme n'est rien d'autre que la série de ses actes.

Friedrich Hegel.

Introduction

Revenons pour introduire ce chapitre quelques siècles en arrière, au temps de Zénon d'Élée, philosophe grec du cinquième siècle avant J-C. Celui-ci est resté célèbre par sa position très sceptique vis-à-vis de certaines théories scientifiques développées à l'époque (notamment par Platon) concernant la divisibilité du temps et des mouvements, et les quelques paradoxes qu'il nous a laissés à méditer à ce sujet. Le plus connu d'entre eux est peut-être celui de la course entre Achille et la tortue. Pour fixer les idées, supposons qu'Achille courre à 10 mètres par seconde (à peu de choses près la vitesse d'un record du monde de 100 mètres), et la tortue (un peu génétiquement modifiée) à 1 mètre par seconde. Achille s'élance avec cent mètres de retard. Quand va-t-il rejoindre la tortue ? La réponse un peu surprenante de Zénon est : « jamais ». Voici son raisonnement : le temps qu'Achille parcoure ses cent mètres, la tortue en a franchi dix. Mais le temps qu'Achille parcourre ces dix nouveaux mètres, la tortue en a fait un de plus etc. On aura beau multiplier les étapes, Achille sera toujours derrière. Comment résoudre le paradoxe ? Regardons les choses d'un point de vue temporel : Achille met 10 secondes pour franchir les cent premiers mètres, puis une seconde supplémentaire pour les dix mètres suivants, $\dfrac{1}{10}$ seconde pour le mètre suivant etc. Au total, Achille met donc $10 + 1 + \dfrac{1}{10} + \dots$ secondes avant de rejoindre la tortue. L'astuce est toute simple : cette somme, bien que composée d'un nombre infini de réels, est finie. Ainsi, même s'il faut un nombre infini d'étapes à Achille pour rejoindre la tortue, celles-ci vont toutes se dérouler dans un laps de temps fini. C'est là l'idée d'une série (convergente) en mathématiques : une somme d'un nombre infini de termes qui donne pourtant un résultat fini.

Objectifs du chapitre :

- savoir prouver correctement la convergence d'une série numérique.
- effectuer un calcul de somme dans un cas simple ou classique.

1 Définitions

Définition 1. Soit (u_n) une suite réelle. La **série de terme général** u_n est la suite S_n des sommes partielles de la suite (u_n). Autrement dit, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. On note cette série $\sum u_n$.

Remarque 1. On peut construire des séries à partir de suites qui ne sont pas définies à partir de $n = 0$. Dans ce cas, on changera naturellement la valeur de départ dans la somme : si (u_n) est définie pour $n \geqslant n_0$, on pose $\forall n \geqslant n_0$, $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

Exemple La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ (pour $n \geqslant 1$) est définie par $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$. Attention à ne pas confondre u_n et S_n : les premiers termes de la suite (u_n) sont $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{1}{4}$; $u_3 = \frac{1}{9}$. Ceux de la série (S_n) sont $S_1 = 1$; $S_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $S_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$.

Définition 2. La série $\sum u_n$ est **convergente** si la suite (S_n) a une limite finie. Dans ce cas, la limite de la suite (S_n) est appelée **somme de la série**, et notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Dans le cas contraire, la série est dite divergente. Déterminer la nature d'une série revient à déterminer si elle est convergente.

Remarque 2. **Attention**, la convergence de la suite (u_n) et celle de la série $\sum u_n$ ne sont pas du tout la même chose ! La convergence d'une série revient à celle des sommes partielles de la suite (u_n). Il faut par ailleurs faire très attention à la manipulation des sommes infinies. On ne peut utiliser cette notation qu'à partir du moment où on sait que la série converge, et on ne peut pas manipuler ces sommes aussi aisément que des sommes finies. Dans tous les cas, il est indispensable de s'assurer de la convergence d'une série avant d'utiliser ces sommes, c'est pourquoi on commence toujours, lors de l'étude d'une série inconnue, par étudier les sommes partielles, puis passer à la limite.

Exemple : Reprenons l'exemple de l'introduction. Si on pose $u_n = \frac{1}{10^{n-1}}$, on se rend compte que le temps mis par Achille pour rejoindre la tortue peut s'exprimer comme la somme de la série $\sum u_n$. Vérifions sa convergence : on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^{n-1}}$. C'est une somme géométrique, que l'on sait calculer : $S_n = \frac{10 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}}$. Lorsque n tend vers $+\infty$, on a bien convergence de S_n vers $\frac{10}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9}$. On en déduit la convergence de la série, dont la somme vaut $\frac{100}{9}$ (ce qui représente le temps mis par Achille pour rejoindre la tortue).

Exemple : Il peut arriver qu'on puisse démontrer la convergence d'une série sans pour autant savoir calculer sa somme. Ainsi la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ (définie pour $n \geqslant 1$), qui a fait l'objet d'un exercice faisant intervenir des suites adjacentes il y a quelques semaines, est convergente, mais on ne dispose pas de moyen simple de déterminer sa somme, qui vaut en l'occurence $\frac{\pi^2}{6}$.

Exemple : Un petit dernier avec alternance de signes dans le terme général : $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (pour $n \geqslant 1$). Plutôt que d'étudier directement S_n, on va séparer l'étude des termes d'indices pairs et impairs. La suite (S_{2n}) des termes d'indices pairs est croissante puisque $S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0$. De même on montre facilement que la suite (S_{2n+1}) des termes impairs est décroissante. Comme de plus, leur différence $S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}$ tend vers 0, les deux suites sont adjacentes, et convergent donc vers une limite commute, qui est également limite de la suite (S_n). On peut montrer par d'autres méthodes que $\lim_{n \to +\infty} S_n = \ln(2)$.

Définition 3. Si la série $\sum u_n$ converge, le **reste d'indice** n de la série est le réel $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n$.

Proposition 1. Sous les hypothèses précédentes, la suite (R_n) converge vers 0.

Démonstration. En effet, comme les sommes partielles convergent vers la somme de la série, l'écart entre les deux tend vers 0. □

Définition 4. La série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ converge.

Proposition 2. Une série absolument convergente est convergente.

Démonstration. Pas pour l'instant ! Vous reverrez en deuxième année des critères de convergence permettant de démontrer cette propriété. □

Remarque 3. Attention, la réciproque n'est pas vraie. Par exemple la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, dont on a vu qu'elle était convergente, n'est pas absolument convergente (cf dernière partie du cours, divergence de la série harmonique). On dit que c'est une série semi-convergente.

2 Propriétés

Proposition 3. Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors le terme général u_n converge vers 0.

Démonstration. En effet, si la série converge, S_n converge vers la somme S de la série. Mais alors, S_{n+1} tend aussi vers S. Or, on a $u_n = S_{n+1} - S_n$, qui converge donc vers 0. □

Remarque 4. Attention, cette condition est nécessaire mais **pas** suffisante. Encore une fois, la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, et pourtant, la limite de $\frac{1}{n}$ vaut bien 0.

Exemple : Ce critère s'utilise surtout via sa contraposée : si le terme général ne tend pas vers 0, alors la série est divergente. Par exemple, la série de terme général $(-1)^n$ ne converge pas.

Proposition 4. Si deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors leur somme $\sum (u_n + v_n)$ est convergente, et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k)$. De même, si λ est un réel quelconque, $\sum \lambda u_n$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Démonstration. C'est une application directe des propriétés de la limite. Montrons par exemple la première partie. Notons S_n, T_n et U_n les sommes partielles respectives des séries de terme général u_n, v_n et $u_n + v_n$. On a manifestement $U_n = S_n + T_n$. Si les deux suites S_n et T_n convergent, ce sera donc aussi le cas de U_n et sa limite est bien la somme des limites de S_n et de T_n. □

Remarque 5. Attention encore une fois à la rédaction : ce n'est pas parce qu'une série est convergente et qu'on peut découper la somme en deux morceaux que les deux morceaux en question forment également des séries convergentes. Il est donc préférable encore une fois de ne travailler dans un premier temps qu'avec des sommes partielles.

Proposition 5. Si le terme général u_n de la série est positif, la série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Démonstration. En effet, la suite (S_n) est alors croissante. Elle est donc soit majorée et convergente, soit non majorée, auquel cas elle tend vers $+\infty$. □

Corollaire 1. Soient deux séries de termes généraux u_n et v_n vérifiant $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge également. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge aussi.

Démonstration. En effet, dans le premier cas on aura, en notant n_0 le rang à partir duquel les inégalités sont vérifiées, $\forall n \geqslant n_0$, $S_n = \sum_{k=n_0}^{k=n} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{k=n} v_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$, donc les sommes partielles de terme général u_n sont majorées et la série correspondante converge. La deuxième propriété est similaire, en utilisant cette fois-ci que la série de terme général v_n est supérieure à une suite divergant vers $+\infty$, donc diverge elle aussi vers $+\infty$. □

Théorème 1. Comparaison série-intégrale.
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs vérifiant les hypothèses suivantes :
- la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
- il existe une fonction f continue sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ telle que $u_n = f(n)$.

Alors la série $\sum u_n$ a la même nature que l'intégrale $\int_a^x f(t)\ dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration. Pas de preuve de ce théorème vaguement hors-programme, mais ce n'est en fait pas très difficile (voir l'exemple détaillé de la série harmonique un peu plus bas pour une idée de preuve). □

Exemple : La série de terme général $\frac{1}{n\ln(n)}$ (pour $n \geqslant 2$) vérifie les hypothèses de ce théorème. Elle a donc la même nature que $\int_2^x \frac{1}{t\ln(t)}\ dt = [\ln(\ln(t))]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2))$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(\ln(x)) = +\infty$, la série est divergente (c'est un cas particulier de ce qu'on appelle les séries de Bertrand).

Théorème 2. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \sim v_n$, alors les deux séries ont la même nature.

Démonstration. Ce théorème, ainsi que d'autres critères de convergence sur les séries, sera revu et démontré en deuxième année. Il n'est d'ailleurs pas au programme de première année, mais je vous le cite tout de même car il est extrêmement utile. □

3 Séries classiques

Proposition 6. Séries télescopiques.
Soit $\sum u_n$ une série dont le terme général peut s'écrire sous la forme $v_{n+1} - v_n$, alors la nature de cette série est la même que celle de la suite (v_n).

Démonstration. C'est trivial : $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_{k+1} - v_k = v_{n+1} - v_0$, qui a clairement la même nature que (v_n). En fait, on peut aussi avoir des cas de télescopages entre plusieurs termes consécutifs de la série, pas nécessairement deux. □

Exemple : On cherche à déterminer la nature et la somme de la série de terme général $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.
Comme la série est à termes négatifs et que $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$, qui est le terme général d'une série convergente, notre série converge. Pour le calcul de la somme par télescpage, il est fortement conseillé d'écrire le télescopage avec des sommes partielles pour ne pas risquer de découper une série

convergente en somme de deux séries divergentes : $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln(k) = \sum_{k=3}^{n+1} \ln(k) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) = \sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) + \ln(n) + \ln(n+1) + \ln(2) + \sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) - 2\ln(2) - 2\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) - 2\ln(n+1) = -\ln(2) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$. Cette expression ayant pour limite $-\ln(2)$ quand n tend vers $+\infty$, notre série est bien convergente, et $\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\ln(2)$.

Définition 5. Soit $q \in \mathbb{R}$, la série $\sum q^n$ est appelée **série géométrique** de raison q.

Proposition 7. La série géométrique de raison q est convergentes si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Démonstration. On sait calculer les sommes partielles depuis un certain temps : $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. En faisant tendre n vers $+\infty$ et en utilisant les résultats sur les limites de suites géométriques, on constate la convergence de la série lorsque $|q| < 1$, vers la somme indiquée. □

Remarque 6. Ce résultat se généralise à d'autres séries, souvent désignées sous le nom de séries géométriques dérivées (vous comprendrez pourquoi quand on va faire le calcul de la somme partielle. On appelle notamment **série géométrique dérivée** de raison q la série de terme général kq^{k-1}. Cette série converge si et seulement si $|q| < 1$, et dans ce cas, $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Pour le prouver, posons $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. La somme partielle de la série géométrique classique n'est autre que $f(q)$, mais les séries géométriques dérivées peuvent également s'exprimer simplement en fonction de f, ou plutôt de ses dérivées (d'où le nom !) : $f'(x) = \sum_{k=1}^{k=n} kx^{k-1}$, donc $f'(q)$ représente la somme partielle de la série géométrique dérivée de raison q. Or on sait par ailleurs que $f(q) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, donc (via un sympathique calcul de dérivée de quotient) $f'(q) = \frac{-(n+1)q^n + (1-q^{n+1})}{(1-q)^2} = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-q)^2}$. Il ne reste plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$, en utilisant le fait que $\lim_{n\to+\infty} nq^n = 0$ (par croissance comparée) pour obtenir la convergence de la somme partielle vers la valeur indiquée. Les plus courageux généraliseront ce calcul aux dérivées d'ordre supérieur.

Remarque 7. On peut déduire du résultat précédent les valeurs d'autres sommes de séries. Par exemple, si $|q| < 1$, la série de terme général nq^n converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$. En effet, on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} kq^k = q \times \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$, et on est ramené au cas de la série géométrique dérivée.

Proposition 8. La série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge pour tout réel x, et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$. Pour cette raison, cette série est souvent appelée **série exponentielle**.

Démonstration. On manque d'une définition suffisamment claire de l'exponentielle pour prouver ceci, mais cela découle du développement limité de la fonction. □

Exemple : Quand on choisit $x = 1$, on obtient $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$.

Définition 6. La série de terme général $\frac{1}{n}$ est appelée **série harmonique**.

Proposition 9. La série harmonique est divergente. Plus précisément, la somme partielle de cette série est équivalente à $\ln n$.

Démonstration. La divergence de cette série est une conséquence triviale du théorème de comparaison série-intégrale. Pour obtenir l'équivalent, on va faire un calcul un peu plus précis : $\forall x \in [k; k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$. En intégrant ces inégalités entre k et $k+1$, on obtient $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx$, soit $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leqslant \frac{1}{k}$. Gardons l'inégalité de droite et décalons l'indice dans celle de gauche pour obtenir l'encadrement $\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\, dx \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx$. En additionnant ces encadrements pout tous les entiers de 2 à n (on ne peut pas le faire pour $k = 1$ à cause du $k - 1$ apparaissant dans le membre de gauche), on obtient alors $\int_1^n \frac{1}{x}\, dx \leqslant \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} \leqslant \int_2^{n+1} \frac{1}{x}\, dx$, soit $\ln n - \ln 1 \leqslant \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n+1) - \ln 2$. En notant $H_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$, on a donc $\ln n + 1 \leqslant H_n \leqslant \ln(n+1) - \ln 2 + 1$. En divisant tout par $\ln n$, on en déduit $1 + \frac{1}{\ln n} \leqslant \frac{H_n}{\ln n} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{\ln n} + \frac{1 - \ln 2}{\ln n}$. Le membre de gauche a manifestement pour limite 1, quand n quand n tend vers $+\infty$, et celui de droite également, car $\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$, donc $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln n}$, qui tend vers 1. Via le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$, ce qui signifie exactement que $H_n \sim \ln n$. □

Définition 7. Plus généralement, les séries de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ sont appelées **séries de Riemann**. Elles convergent pour toutes les valeurs de $\alpha > 1$.

Démonstration. C'est un exercice facile utilisant la comparaison série-intégrale. □

4 Developpement décimal d'un réel

Théorème 3. Soit x un réel quelconque, alors x est la somme d'une série de la forme $\sum \frac{a_n}{10^n}$, avec $a_0 \in \mathbb{Z}$, et $\forall n \geqslant 1$, $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$. De plus, cette série est unique si on impose que la suite (a_n) ne doit pas être stationnaire avec pour limite 9. Les nombres de la suite (a_n) forment ce qu'on appelle le **développement décimal** du nombre réel x.

Démonstration. De fait, les chiffres constituant la suite (en oubliant a_0 qui sera seulement la partie entière de x) sont simplement les décimales du nombre x (écrit sous forme décimale usuelle). Toute série de la forme introduite dans l'énoncé converge clairement : elle est à termes positifs (à l'exception de a_0), et majorée par la série géométrique convergente de terme générale $\frac{9}{10^n}$. Pour trouver une telle série convergeant vers x, il suffit de poser $a_0 = Ent(x)$, puis $a_n = Ent(10^n * x) - 10 * Ent\left(10^{n-1} * x\right)$ (ce qui correspond exactement à prendre pour a_n la n-ème décimale du réel x). On vérifie à l'aide des propriétés de la partie entière que $\left| x - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \right| \leqslant \frac{1}{10^n}$, ce qui assure la convergence de la série vers x (on ne détaillera pas plus cette démonstration un peu technique). □

Théorème 4. Un nombre réel x est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

Démonstration. Si $x = \dfrac{p}{q}$ est un nombre rationnel, on peut obtenir les chiffres de la suite (a_n) en effectuant la division euclidienne de p par q. Le nombre de restes possibles à chacune des étapes possibles de cette division étant fini, on finira nécessairement par obtenir à une certaine étape un reste déjà obtenu précédemment. Il est alors facile de se convaincre que les étapes suivantes vont répéter exactement les mêmes opérations que les étapes suivant la première apparition de ce reste, et fourniront donc les mêmes décimales (une démonstration plus technique à coups de parties entières est aussi possible pour les plus motivés).

La réciproque est intéressante, il faut prouver que si la suite (a_n) est périodique à partir du rang $n_0 + 1$ (le $+1$ est plus pratique pour la suite), le nombre x somme de la série de terme général $\dfrac{a_n}{10^n}$ sera rationnel. Commençons par signaler que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{10^k}$ est rationnel (c'est une somme finie de nombres rationnels), il suffit donc de prouver que $R = \displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ l'est aussi. Notons p la période de la suite (a_n), et découpons les restes en tranches de p termes : $R = \displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=n_0+p+1}^{n_0+2p} \frac{a_k}{10^k} + \cdots = \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p} \frac{a_k}{10^{k+p}} + \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p} \frac{a_k}{10^{k+2p}} + \ldots$. En notant $X = \displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p} \frac{a_k}{10^k}$, on peut donc écrire $R = X\left(1 + \dfrac{1}{10^p} + \dfrac{1}{10^{2p}} + \ldots\right) = X \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{kp}}$. Cette dernière somme est une somme géométrique convergeant vers $\dfrac{1}{1 - 10^p}$, qui est un nombre rationnel. Le nombre X étant lui-même rationnel, on a terminé la démonstration. □

Exemple : Pour ceux qui n'ont rien compris à la démonstration, un exemple plus concret pour comprendre comment retrouver la forme rationnelle de x à partir de son développement décimal périodique. Posons donc $x = 2.15674237813781378137 81\ldots$ (la suite est supposée continuer à faire du 3781 périodiquement). On écrit $x = 2.156742 + 3\ 781 \times \left(\dfrac{1}{10^{10}} + \dfrac{1}{10^{14}} + \dfrac{1}{10^{18}} + \ldots\right) = \dfrac{2\ 156\ 742}{10^6} + \dfrac{3\ 781}{10^{10}} \times \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10^4}\right)^k = \frac{2\ 156\ 742}{10^6} + \frac{3\ 781}{10^{10}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10^4}} = \frac{2\ 156\ 742}{10^6} + \frac{3\ 781}{10^6} \times \frac{1}{9\ 999}$. On peut s'amuser à tout regrouper mais ça n'a pas grand intérêt.

5 Mathémagiques

Cette dernière partie, complètement hors-programme, est fortement inspirée d'un article du grand mathématicien Pierre Cartier (né en 1932), intitulé *Mathemagics (a tribute to L.Euler and R.Feynman)*, et facilement téléchargeable en ligne pour les plus motivés d'entre vous (une bonne partie de l'article dépasse quand même nettement votre domaine de compétences ; accessoirement, ça vous fera bosser un peu votre anglais, il n'y a pas de traduction disponible à ma connaissance).

5.1 Des calculs dignes d'un élève de PTSI !

Nous allons effectuer dans les paragraphes qui suivent des séries de calculs pour le moins douteux, notamment en manipulant joyeusement des séries divergentes comme si elles convergeaient, pour obtenir des résultats pour le moins suprenants. La partie suivante essaiera de donner quelques pistes pour justifier la cohérence de tels calculs, qu'il est évidemment hors de question de faire figurer sur une copie !

5.1.1 Sommes de séries divergentes.

Considérons la série de terme général $(-1)^n$. Elle diverge bien sûr grossièrement puisque $(-1)^n$ ne tend pas vraiment vers 0. Pourtant, si on supposait qu'elle puisse admettre une somme que nous noterons $S = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$, quelle serait la valeur la plus logique à donner à S ? Laissons la parole à notre taupin peu rigoureux, qui va faire le brillant calcul suivant :

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} S & = & 1 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & \dots \\ +S & = & 0 & + & 1 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & + & 1 & \dots \\ \hline 2S & = & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & \dots \end{array}$$

Finalement, $2S = 1$, soit $S = \frac{1}{2}$. Logique, non ? Tout ce qu'on a utilisé, c'est le droit d'additionner deux séries, et le fait qu'on ne change pas la somme en décalant les termes et en ajoutant un 0 au début. Sur sa lancée, notre élève zélé décide de tenter une bidouille à sa façon sur la série $\sum(-1)^n n$, qui diverge tout autant que la précédente. Il note T la somme de cette série divergente, et effectue le calcul suivant :

$$\begin{array}{rcccccccccccccccc} T & = & 0 & - & 1 & + & 2 & - & 3 & + & 4 & - & 5 & + & 6 & \dots \\ +T & = & 0 & + & 0 & - & 1 & + & 2 & - & 3 & + & 4 & - & 5 & \dots \\ \hline 2T & = & 0 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & + & 1 & \dots \end{array}$$

On reconnait sur la dernière ligne l'opposée de la série précédente, on conclut donc que $2T = -S = -\frac{1}{2}$, donc $T = -\frac{1}{4}$. Encore un calcul d'une logique imparable, qui utilise les mêmes propriétés que précédemment (linéarité et « décalabilité » de la somme). Il est maintenant temps de tenter un troisième calcul encore plus impressionnant que les deux autres réunis. On va tenter de calculer la somme de la série $\sum k$, qui semble vraiment très très divergente. N'ayons pas peur et notons U la somme de cette série, puis effectuons le calcul suivant :

$$\begin{array}{rcccccccccccccccc} U & = & 0 & + & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & \dots \\ +T & = & 0 & - & 1 & + & 2 & - & 3 & + & 4 & - & 5 & + & 6 & \dots \\ \hline U+T & = & 0 & + & 0 & + & 4 & + & 0 & + & 8 & + & 0 & + & 12 & \dots \end{array}$$

On obtient cette fois-ci la relation $U+T = 4U$, soit $3U = T = -\frac{1}{4}$. On conclut au surprenant résultat suivant : la somme de tous les entiers vaut $-\frac{1}{12}$. Bon, n'allez pas trop le répéter, on risquerait de vous prendre pour encore plus mauvais en maths que vous ne l'êtes vraiment. Contentons-nous de signaler que, pour obtenir ces résultats absurdes, on n'a utilisé que les deux propriétés suivantes : la linéarité de la somme de série, et la « décalabilité ». Ces deux propriétés sont évidemment vraies pour des séries convergentes, mais peut-on les prolonger de façon cohérentes à d'autres séries ? Nous reviendrons là-dessus plus loin. En attendant, continuons à faire des calculs bizarres pour obtenir des résultats rigolos (et parfois même corrects !). Il n'y a pas que les sommes dans la vie, on peut manipuler bien d'autres choses de façon peu rigoureuse.

5.1.2 Manipulations douteuses de polynômes.

Intéressons-nous au polynôme $S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^k$. Ah oui, tiens, ce n'est pas tout à fait un vrai polynôme. Bon, pas grave, on va faire comme si de rien n'était. Effectuons alors une manipulation qui ressemble étrangement à ce que nous avons fait à plusieurs reprises dans le paragraphe précédent :

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
S(t) & = & 1 & - & t & + & t^2 & - & t^3 & + & t^4 & - & t^5 & \dots \\
+tS(t) & = & 0 & + & t & - & t^2 & + & t^3 & - & t^4 & + & t^5 & \dots \\
\hline
(1+t)S(t) & = & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & \dots
\end{array}$$

Bref, $S(t) = \dfrac{1}{1+t}$. En fait, cette relation est rigoureusement exacte, à une condition, c'est qu'on ait $|t| < 1$ (on calcule alors une somme de série géométrique convergente). Poussons un peu le bouchon en considérant que ce n'est pas loin de marcher pour $t = 1$, ce qui donnerait $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k = \frac{1}{2}$. Tiens, ça ne vous rappelle pas quelque chose ? Généralisons un peu (volontairement, je ne mets pas d'indices sous la somme, puisqu'on va appliquer un calcul qui serait correct avec des sommes finies à des sommes de séries), pour tout entier naturel p, on peut écrire : $\sum(-1)^k t^k k^p = \sum k^p(-t)^k$. Remarquons maintenant la chose suivante : si on pose $f(t) = (-t)^n$, alors $tf'(t) = t \times (-n) \times (-t)^{n-1} = n(-t)^n$. En notant φ l'application linéaire qui, à une fonction f de la variable t, associe $tf'(t)$, on peut alors écrire que $k^p(-t)^k = \varphi^p((-t)^n)$ (la puissance étant à comprendre au sens d'une composée d'application linéaire, comme d'habitude). Enchainons avec le sublime calcul suivant, en utilisant la linéarité sur une somme infinie (après tout, ça marche quand la somme est finie, y a pas de raison de se priver de généraliser) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k^p(-t)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^p((-t)^k) = \varphi^p\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(-t)^k\right) = \varphi^p\left(\frac{1}{1+t}\right)$.

Lorsque p est égal à 0, on retrouve le résultat du calcul précédent : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-t)^k = \frac{1}{1+t}$. Appliquons une première fois l'application φ : $\displaystyle\left(\frac{1}{1+t}\right)' = -\frac{1}{(1+t)^2}$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k(-1)^k t^k = -\frac{t}{1+t}$. Si on se permet de prendre $t = 1$ dans cette relation, on retrouve $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k k = -\frac{1}{4}$, soit la formule obtenue pour la somme T dans le paragraphe précédent. On peut continuer : pour $p = 2$, on calcule $\displaystyle t \times \left(\frac{-t}{(1+t)^2}\right)' = t \times \frac{-(1+t)^2 + 2t(1+t)}{(1+t)^4} = \frac{t(t-1)}{(1+t)^3}$. On peut donc écrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k k^2 t^k = \frac{t(t-1)}{(1+t)^3}$, ce qui donne, en prenant $t = 1$, l'intéressante relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k k^2 = 0$ (mais oui). Je vous laisse vérifier si vous le souhaitez que, pour $p = 3$, on obtiendrait de même $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k k^3 = \frac{1}{8}$, et on peut continuer encore longtemps comme ça. Passons plutôt à autre chose.

5.1.3 Un peu d'intégrales.

Puisque multiplier un peu tout et n'importe quoi par $(-1)^k$ donne des résultats rigolos, pourquoi ne pas tenter de donner une valeur à la somme suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k k!$? Après tout, là, on a quelque chose qui diverge quand même bien violemment. Pas grave, on va s'en sortir, il « suffit » pour cela de savoir qu'on peut écrire $\displaystyle k! = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^k\,dt$ (c'est même à peu près à votre portée, ça se prouve par une récurrence assez tranquille, en admettant qu'on a le droit de faire une IPP sur une intégrale avec une borne infinie). Il ne reste plus alors qu'à utiliser la linéarité de l'intégrale (quoi ? une somme infinie ? ah désolé je n'avais pas vu) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k k! = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-t}(-t)^k\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sum_{k=0}^{+\infty}(-t)^k\,dt =$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt$. Bon, on ne sait pas calculer cette dernière intégrale, mais on sait très bien prouver mathématiquement qu'elle extiste bel et bien (attendez l'an prochain pour faire cette preuve). Elle vaut environ 0.596 (merci Wolfram, ça ne s'exprime pas très simplement, on a besoin d'une primitive de $\dfrac{e^x}{x}$ pour pouvoir donner une valeur exacte).

5.1.4 Une généralisation osée des relations coefficients-racines.

Dans ce dernier paragraphe consacré à des calculs absurdes, nous allons obtenir des relations tout à fait censées, et même rigoureusement exactes, à l'aide de calculs qui le sont nettement moins. Vous connaissez tous les relations coefficients-racines sur les polynômes ? On va les exprimer de façon légèrement différente de ce qu'on a vu en cours, puis appliquer le résultat à une fonction qui n'a rien d'un polynôme, et le résultat sera vraiment magique. Soit donc un polynôme P unitaire de degré n ayant n racines notées α_1, …, α_n (pas d'arnaque pour l'instant, c'est un vrai polynôme). On peut donc écrire $P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$. On peut également écrire ce même polynôme sous forme développée $P = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, avec les relations que vous connaissez bien : $\alpha_1+\cdots+\alpha_n = -c_{n-1}$ etc. On va effectuer un calcul différent en s'intéressant à la dérivée logarithmique du polynôme P, à savoir $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \dfrac{1}{x-\alpha_1} + \dfrac{1}{x-\alpha_2} + \cdots + \dfrac{1}{x-\alpha_n}$ (on dérive P sous forme factorisée pour obtenir n termes qui sont des produits de $n-1$ facteurs de la forme $x-\alpha_i$, ce qui se simplifie quand on divise par P). Allons plus loin : $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} \times \frac{1}{1-\frac{x}{\alpha_i}} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{\alpha_i}\right)^k$ (bon, ok, ce serait mieux que le quotient apparaissant dans la deuxième somme soit de valeur absolue plus petite que 1, mais faisons comme si on n'avait rien vu). Autrement dit (et quitte à inverser les sommes), $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = -\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{x^k}{\alpha_i^{k+1}}$. Notons, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\gamma_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i^k}$, on peut alors écrire notre relation sous la forme (en multipliant tout par x pour avoir les mêmes puissances dans la somme de droite) :

$$xP'(x) + P(x) \times \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k x^k = 0$$

.

On peut identifier les termes de même degré dans cette équation, en écrivant P' et P sous forme développée : $c_1 x + 2c_2x^2 + \cdots + nc_nx^n + (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n)(\gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_n x^n) = 0$. On suppose pour simplifier que $c_0 = 1$, et en prenant les termes par puissances croissantes, on trouve les relations :

- $c_1 + \gamma_1 = 0$, soit $\gamma_1 = -c_1$.
- $2c_2 + \gamma_2 + c_1\gamma_1 = 0$, soit $\gamma_2 = c_1^2 - 2c_2$.
- $3c_3 + \gamma_3 + c_1\gamma_2 + c_2\gamma_1 = 0$, soit $\gamma_3 = -c_1^3 + 3c_1c_2 - 3c_3$.
- $4c_4 + \gamma_4 + c_1\gamma_3 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_1 = 0$, soit $\gamma_4 = c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 - 4c_4 + 2c_2^2$.

Appliquons donc ces superbes résultats à un drôle de polynôme : $P(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Quoi, vous n'êtes pas contents ? Pourtant, vous savez tous que $\dfrac{\sin(x)}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + \dots$, oublions le fait que ça part un peu jusqu'à l'infini. On aura donc $c_0 = 1$ (tout va bien), $c_1 = 0$ (et plus généralement $c_{2k+1} = 0$ pour tout entier k), $c_2 = -\dfrac{1}{6}$, $c_4 = \dfrac{1}{120}$ etc. Quelles sont les racines du « polynôme » P ? Facile, ce sont celles de la fonction sinus, sauf 0, autrement dit, tous les multiples pairs de π (attention, il y en a des négatives, ce n'est pas évident de numéroter). Avec les notations précédentes, on peut par exemple calculer $\gamma_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(-k\pi)^2} = \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$. Si on en croit les relations ci-dessus,

$\gamma_2 = c_1^2 - 2c_2 = \dfrac{1}{3}$, soit en faisant passer les constantes à droite, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Eh ben oui, c'est vrai, ça marche ! Si ça c'est pas une méthode qui tue pour démontrer ce résultat difficile, je ne sais pas ce qu'il vous faut. Ne nous arrêtons pas en si bon chemin, regardons ce que vaut $\gamma_4 = \dfrac{2}{\pi^4} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$. En appliquant encore les relations, $\gamma_4 = 0 - 0 + 0 - \dfrac{4}{120} + \dfrac{2}{36} = -\dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{18} = \dfrac{2}{90}$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$, ce qui est également tout à fait exact. On pourrait bien sûr généraliser à toutes les sommes de la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$, pour tous les entiers p qui sont pairs. Par contre, ça ne marche pas du tout quand p est impair, puisqu'on a alors trivialement $\gamma_p = 0$ (les racines négatives compensent les positives). Ce n'est pas un hasard, puisque ces valeurs ne peuvent de fait pas s'exprimer simplement. On va revenir un peu dessus un peu plus bas.

5.2 D'autres types de convergence pour les séries numériques.

Revenons un peu désormais à l'aspect théorique caché derrière ces drôles de calculs. Une façon un peu tordue de voir la théorie des séries est de considérer que la somme de séries est une application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ \sum u_n & \mapsto & S \end{array} \right.$, qui est définie sur un espace vectoriel E (celui des séries convergentes) qui est un sous-espace vectoriel du gros espace vectoriel constitué de toutes les séries numériques réelles. Cette application φ est une application linéaire, et elle est « décalable » au sens vu précédemment. La question qu'on peut se poser est simple : peut-on prolonger cette application φ à un espace E' plus gros que E de façon à ce qu'elle conserve la linéarité et la « décalabilité » et qu'elle coïncide bien sûr avec l'application φ pour toutes les séries convergentes ? Eh bien, la réponse est oui. Attention tout de même, on ne va non plus obtenir tout ce qu'on voudrait, et notamment on ne justifiera jamais la somme U de la première partie par un calcul de convergence « décalable », comme le prouve le calcul suivant :

$$\begin{array}{rcccccccccccccccl} U & = & 0 & + & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & \dots \\ -2U & = & 0 & + & 0 & - & 2 & - & 4 & - & 6 & - & 8 & - & 10 & \dots \\ +U & = & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & \dots \\ \hline 0 & = & 0 & + & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & \dots \end{array}$$

La relation $0 = 1$, quand même, on a beau aller chercher aussi loin qu'on veut, ça pose problème. Pas grave, on va quand même voir deux nouvelles définitions de la convergence de séries qui étendent la définition classique vue dans ce cours, et qui permettent de comprendre un peu mieux pourquoi les valeurs aberrantes calculées pour S, T et U ont une certaine logique. Commençons par quelque chose que vous pouvez vraiment bien comprendre :

Définition 8. Une suite réelle (u_n) est **convergente au sens de Cesaro** si la suite auxiliaire définie par $v_n = \dfrac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}$ converge.

Autrement dit, (u_n) converge si la moyenne de ses sommes partielles converge. Un résultat classique sur les suites affirme qu'une suite convergente (au sens classique) est toujours convergente au sens de Cesaro (avec la même limite), ce qui prouve que cette nouvelle notion de convergence étend la notion classique (ce résultat constitue une partie de l'exercice 13 de la feuille d'exercices numéro 7). Il est assez facile de créer des exemples de suite qui convergent au sens de Cesaro, mais pas au sens usuel. Par exemple, $u_n = (-1)^n$ tend vers 0 au sens de Cesaro.

Essayons d'appliquer cette définition à nos différentes séries (attention, il s'agit bien ici de faire la moyenne des sommes partielles, et pas des termes généraux) : pour $\sum(-1)^k$, on calcule $S_0 = 1$,

$S_1 = 1 - 1 = 0$, $S_2 = 1$, $S_3 = 0$ etc. Autrement dit, $\dfrac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1} = \dfrac{1}{2}$ si n est impair, et $\dfrac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1} = \dfrac{\frac{n}{2}+1}{n+1}$ si n est pair. Ces moyennes tendent vers $\dfrac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$, ce qui prouve la convergence au sens de Cesaro de notre série vers $\dfrac{1}{2}$. Tentons de faire la même chose pour $\sum(-1)^k k$. On calcule donc $T_0 = 0$, $T_1 = -1$, $T_2 = 1$, $T_3 = -2$, $T_4 = 2$ etc. On va cette fois-ci obtenir alternativement des sommes partielles égales à 0 (si n est pair), et à $-\dfrac{n+1}{2}$ si n est impair. Ce n'est pas bon du tout, puisqu'il n'y a pas de limite unique quand n tend vers $+\infty$. Tentons alors une nouvelle définition :

Définition 9. Soit (u_n) une suite réelle. On pose, pour tout réel x pour lequel cette somme a un sens, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Si f est définie au voisinage de 1 (mais pas en 1, sinon la série convergerait au sens usuel du terme), et si f admet une limite l quand x tend vers 1, on dit que la série $\sum u_n$ converge au sens d'Abel vers l.

En fait, la fonction f est presque toujours définie sur $]-1,1[$ (c'est notamment toujours le cas si (u_n) est bornée), et beaucoup de séries divergentes convergent au sens d'Abel. C'est par exemple le cas de notre série (T_n) : on pose alors $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k(-x)^k = \frac{-x}{(1+x)^2}$ si $|x| < 1$ (c'est une série géométrique dérivée tout ce qu'il y a de plus classique). De plus, f admet bel et bien une limite en 1, égale à $-\dfrac{1}{4}$, ce qui justifie (au sens d'Abel) la valeur obtenue pour T. Il ne faut pas rêver, on n'obtiendra pas U de la même façon, car cette convergence vérifie le critère de « décalabilité ». Pour tenter de trouver une explication pour cette dernière valeur, on va rester dans le domaine des prolongements de fonction, mais en passant dans le domaine complexe :

Définition 10. La **fonction** ζ de Riemann est définie par $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Cette fonction est définie tout à fait rigoureusement et correctement à la condition que $\mathrm{Re}(s) > 1$. En particulier, on notera que $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$; $\zeta(4) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Toutes les valeurs de la fonction ζ pour les entiers pairs sont bien connues depuis longtemps, et peuvent s'exprimer à l'aide des puissances paires de π et de nombres appelés nombres de Bernoulli qui sont très classiques en théorie des nombres (l'étude des nombres entiers). Curieusement, les valeurs pour les entiers impairs ne s'expriment pas du tout aussi simplement, et on sait même très peu de choses sur elles. On a par exemple simplement réussi à démontrer que $\zeta(3)$ était un nombre irrationnel en 1977. Quelques progrès ont été effectués depuis puisqu'on sait désormais qu'une infinité des valeurs prises par la fonction ζ pour les entiers impairs sont irrationnelles, mais on ne sait pas lesquelles (on soupçonne qu'elles le sont toutes) ! La fonction ζ est par ailleurs fondamentale pour de nombreux problèmes mathématiques, et intervient notamment de façon centrale dans l'étude des propriétés des nombres premiers. Sans chercher à rentrer dans les détails (si vous êtes vraiment motivés, un simple coup d'oeil à la page Wikipedia consacrée à cette fonction devrait vous faire très peur), citons simplement le plus célèbre problème posé par cette fonction, qui reste un problème ouvert à l'heure actuelle (si vous arrivez à démontrer cette conjecture, un million de dollars pour vous) :

Théorème 5. Hypothèse de Riemann : tous les nombres complexes annulant la fonction ζ ont une partie réelle égale à $\dfrac{1}{2}$.

J'ai énoncé le résultat sous forme de théorème, mais j'insiste, ce n'en est pas un, mais une simple conjecture. On connait des centaines de zéros de la fonction qui vérifient tous ce critère (et bien sûr aucun qui ne le vérifie pas). Je ne peux malheureusement pas vous expliquer beaucoup plus de choses sur cette fonction, si ce n'est qu'on peut la prolonger de façon unique (sous certaines conditions) en une fonction définie sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, et que ce prolongement vérifie en particulier (en gardant la même notation pour la fonction prolongée) que $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, ce qui reviendrait à dire que $\sum_{k=1}^{+\infty} 1 = -\frac{1}{2}$; et surtout que $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$, ce qui revient à dire que $\sum_{k=1}^{+\infty} k = -\frac{1}{12}$. La fonction prendra aussi, naturellement, des valeurs pour les autres entiers négatifs, ce qui donne par exemple $\zeta(-3) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^3 = \frac{1}{120}$. Allez, un dernier calcul absurde pour finir en beauté :

On souhaite désormais calculer un produit infini très divergent, à savoir $1 \times 2 \times 3 \times \cdots = \prod_{k=1}^{+\infty} k$, ce qu'on va très logiquement noter $\infty!$. L'astuce pour le calcul de ce produit est de passer sous forme exponentielle : $\infty! = e^{\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k)}$. Or, un calcul tout à fait banal nous permet de constater que $\zeta'(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} -\ln(k)e^{-s\ln(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{\ln(k)}{k^s}$. En particulier, $\zeta'(0) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k)$. Ce qui tombe franchement bien, c'est que les innombrables relations faisant intervenir la fonction ζ permettent de prouver que $\zeta'(0)$ est en fait égal à $-\frac{1}{2}\ln(2\pi)$. On en déduit alors que $\infty! = e^{\frac{1}{2}\ln(2\pi)} = \sqrt{2\pi}$. Je crois qu'il est temps de clore ce chapitre sur ce résultat particulièrement fascinant.