Feuille d'exercices n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

23 septembre 2014

Exercice 1 (*)

En constatant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, on peut simplement appliquer les formules d'addition pour obtenir $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. On obtient de même $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, puis en effectuant le quotient $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

Pour $\dfrac{\pi}{24}$, pas vraiment d'autre choix que de passer par les formules de duplication : $2 \times \dfrac{\pi}{24} = \dfrac{\pi}{12}$, donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{24}\right) - 1$. On en déduit que $\cos\left(\dfrac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + 1\right)} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+4}{8}}$. En exploitant ensuite la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on trouve $\sin\left(\dfrac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\dfrac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}$, puis enfin $\tan\left(\dfrac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\dfrac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}}$, ce qu'on peut essayer de simplifier si on a du temps à perdre (mais on n'obtient rien de très simple).

Exercice 2 (** à ***)

1. Cela se produit si $2x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, soit $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$, ce qu'on note également $x \equiv \dfrac{\pi}{8}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. $\sin\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{x}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{x}{4}\right) \Leftrightarrow -x - \dfrac{\pi}{4} \equiv \dfrac{x}{4}[2\pi]$ ou $-x - \dfrac{\pi}{4} \equiv -\dfrac{x}{4}[2\pi] \Leftrightarrow \dfrac{5x}{4} \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $\dfrac{3x}{4} \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$, donc $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\pi}{5} + k\dfrac{8\pi}{5}, -\dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{3\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Il suffit d'utiliser la formule de transformation produit/somme : $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\cos(2x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $2x \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$, donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{6} + k\pi, -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Beaucoup moins compliqué que ça n'en a l'air, il suffit d'y croire :

$$\begin{aligned}
& \sin(3x)\cos^3(x)+\sin^3(x)\cos(3x) &=& \frac{3}{4}\\
\Leftrightarrow\quad & (3\sin(x)-4\sin^3(x))\cos^3(x)+\sin^3(x)(4\cos^3(x)-3\cos(x)) &=& \frac{3}{4}\\
\Leftrightarrow\quad & \sin(x)\cos^3(x)-\sin^3(x)\cos(x) &=& \frac{1}{4}\\
\Leftrightarrow\quad & \sin(x)\cos(x)(\cos^2(x)-\sin^2(x)) &=& \frac{1}{4}\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2}\sin(2x)\cos(2x) &=& \frac{1}{4}\\
\Leftrightarrow\quad & \sin(4x) &=& 1
\end{aligned}$$

On a donc $4x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5. L'équation ne peut avoir de sens que si $x \in [-1;1]$ et $2x \in [-1;1]$, donc $x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. On peut ensuite prendre le sin de chaque côté de l'équation. Comme $\arccos(x) \in [0;\pi]$, $\sin(\arccos(x)) > 0$, et $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2}$. Quant au sinus de $\arcsin(2x)$, il vaut évidemment $2x$, ce qui donne la condition nécessaire $2x = \sqrt{1-x^2}$. Les solutions de l'équation sont donc forcément positives et vérifient, en élevant au carré l'égalité précédente, $4x^2 = 1-x^2$, soit $x^2 = \frac{1}{5}$, donc $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ (la solution négative ayant déjà été exclue). Cette valeur est bien inférieure à $\frac{1}{2}$, donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$.

Exercice 3 (**)

Il suffit d'appliquer une deuxième fois la formule de duplication des tangentes : $\tan(4x) = \tan(2x+2x) = \dfrac{2\tan(2x)}{1-\tan^2(2x)} = \dfrac{\frac{4\tan(x)}{1-\tan^2(x)}}{1-\frac{4\tan^2(x)}{(1-\tan^2(x))^2}} = \dfrac{4\tan(x)(1-\tan^2(x))}{1-6\tan^2(x)+\tan^4(x)}$.

Appliquons la formule à $x = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ (qui a évidemment pour tangente $\frac{1}{5}$) pour obtenir $\tan(4x) = \dfrac{\frac{4}{5}\times(1-\frac{1}{25})}{1-\frac{6}{25}+\frac{1}{625}} = \dfrac{20\times 24}{625-150+1} = \dfrac{480}{476} = \dfrac{120}{119}$. Calculons maintenant $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\arctan\left(\frac{1}{239}\right)\right) = \dfrac{1+\frac{1}{239}}{1-\frac{1}{239}} = \dfrac{240}{238} = \dfrac{120}{119}$. Ca vous rappelle quelque chose ? Les deux angles $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ et $\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ ont la même tangante, et ils sont tous les deux positifs et plus petits que $\frac{\pi}{2}$ (pour le deuxième c'est évident, pour le premier, il faut vérifier que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) > \frac{1}{5}$), ce qui permet de conclure à l'égalité des deux angles, ce qui prouve la formule de Machin. Pour être complets, calculons donc les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{8}$ en utilisant que $2\times\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. On en déduit par exemple que $2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-1\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$. On aura ensuite $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. On obtient enfin $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ (qui pour les plus curieux peut se simplifier en $\sqrt{2}-1$). En tout cas, ce nombre a pour carré $3-2\sqrt{2}$, dont on veut prouver qu'il est supérieur à $\frac{1}{25}$, ce qui revient à dire que $74-50\sqrt{2} > 0$, soit $\sqrt{2} < \frac{37}{25}$. En élevant au carré, on a bien $2 < \frac{1\ 369}{625}$, donc tout va bien (ouf !).

La deuxième formule est plus simple : $\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$. Comme on sait par ailleurs que $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, il est facile de voir que $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2}$, ce qui achève la démonstration de l'égalité.

Exercice 4 (**)

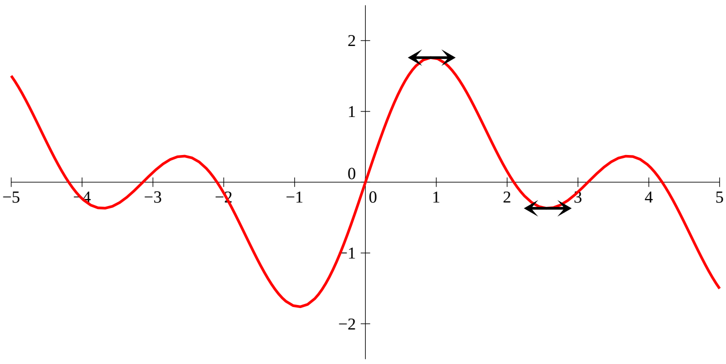
- On sait bien sûr que $\arccos(\cos(x)) = x$ seulement si $x \in [0;\pi]$. Mais on sait aussi que $\cos\left(\frac{507\pi}{3}\right) = \cos(169\pi) = -1$, donc $\arccos\left(\cos\left(\frac{507\pi}{3}\right)\right) = \pi$. Bon, c'eût été un peu plus intéressant en prenant autre chose qu'un multiple de π, mais le principe reste le même.
- Cette expression n'est bien sûr définie que si $x \in [-1;1]$, et puisque $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, son cosinus est nécessairement positif. On peut alors écrire $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}$.
- On sait que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, donc $\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}(\cos(x)+1)$. Or, $\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$, donc $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, et $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2}$.
- Ici, rien d'évident ne sautant aux yeux, on peut tenter une autre tactique consistant à dériver l'expression. Posons donc $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$, alors $f'(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$, avec $u(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. On a donc $1+u(x)^2 = 1 + \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1+x}$, et $u'(x) = \frac{\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = -\frac{1}{1+x}\sqrt{\frac{1}{(1+x)(1-x)}}$. Finalement $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. On reconnait une dérivée usuelle, et on en déduit que $f(x) = \frac{1}{2}\arccos(x) + k$, où k est une constante réelle. Calculons $f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Or, $\frac{1}{2}\arccos(0) = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$. La constante k est donc nulle, et $\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{1}{2}\arccos(x)$ (ce qu'on peut obtenir directement par des arguments trigonométriques).

Exercice 5 (***)

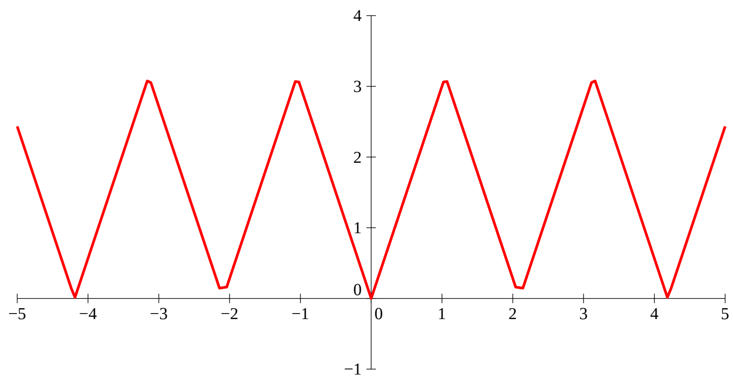
- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire. On va donc restreindre son étude à l'intervalle $[0;\pi]$. Elle est dérivable, de dérivée $f'(x) = \cos(x)+2\cos(2x) = \cos(x)+2(2\cos^2(x)-1) = 4\cos^2(x)+\cos(x)-2$. En posant $X = \cos(x)$, on se ramène à l'étude du signe du trinome $4X^2+X-2$, qui a pour discriminant $\Delta = 1+32 = 33$, et admet donc pour racines $X_1 = \frac{-1+\sqrt{33}}{8}$ et $X_2 = \frac{-1-\sqrt{33}}{8}$. Ces valeurs n'étant certainement pas des cosinus d'angles remarquables, on ne peut que les exprimer à l'aide de la fonction arccos (les deux valeurs sont comprises entre -1 et 1). Comme arccos est une fonction décroissante, $\arccos(X_1) < \arccos(X_2)$, et le tableau de variations ressemble à ceci :

x	0		$x_1 = \arccos(X_1)$		$x_2 = \arccos(X_2)$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	0

On peut, si on est vraiment très motivé, chercher à calculer les valeurs du minimum et du maximum, mais on va tomber sur des valeurs affreuses. Par exemple, $f(x_1) = \sin(\arccos(X_1)) + \sin(2\arccos(X_1)) = \sin(\arccos(X_1)) + 2\sin(\arccos(X_1))\cos(\arccos(X_1))$ en appliquant la formule de duplication. Or, $\sin(\arccos(X_1)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(X_1))}$ (les sinus sont positifs puisqu'on est dans $[0;\pi]$), donc $\sin(\arccos(X_1)) = \sqrt{1-X_1^2}$, avec $X_1^2 = \dfrac{1+33-2\sqrt{33}}{64} = \dfrac{34-2\sqrt{33}}{64}$, soit $\sin(\arccos(X_1)) = \sqrt{\dfrac{30+2\sqrt{33}}{64}} = \dfrac{\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{8}$. On obtient alors $f(x_1) = \dfrac{\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{8} + 2\dfrac{\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{8}\dfrac{\sqrt{33}-1}{8} = \dfrac{\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{8} + \dfrac{(\sqrt{33}-1)\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{32}$ $= \dfrac{(\sqrt{33}+3)\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{32}$. C'est très laid et fort peu expoitable, on se dispensera donc de tenter un calcul du minimum.



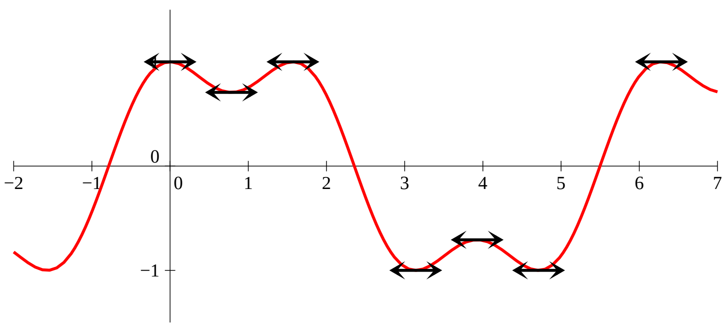
- La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, car $\cos(3x)$ étant toujours compris entre -1 et 1, on tombe toujours dans l'intervalle de définition de la fonction arccos. La fonction est de plus paire (puisque cos l'est), et $\dfrac{2\pi}{3}$ périodique (comme $x \mapsto \cos(3x)$). On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$. Or, sur cet intervalle, on constate que $3x \in [0;\pi]$, donc $\arccos(\cos(3x)) = 3x$. La courbe représentative de g sur cet intervalle est donc un segment de droite, et le reste s'en déduit par la symétrie et la périodicité.
  Les plus courageux auront calculé la dérivée : $g'(x) = -3\sin(3x) \times \dfrac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(3x)}} = \dfrac{3\sin(3x)}{\sqrt{\sin^2(3x)}} = 3\dfrac{\sin(3x)}{|\sin(3x)|}$, qui vaut 3 ou -3 selon le signe de $\sin(3x)$. On retrouve alors l'allure de la courbe.



- La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, mais ni paire ni impaire. On va donc restreindre son étude à l'intervalle $[0; 2\pi]$. On peut la dériver : $h'(x) = -3\sin(x)\cos^2(x) + 3\cos(x)\sin^2(x) = 3\sin(x)\cos(x)(\sin(x) - \cos(x))$. Le dernier facteur s'annule en $\dfrac{\pi}{4}$ et en $\dfrac{5\pi}{4}$, ce qui permet d'établir le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\sin(x)$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0
$\sin(x) - \cos(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
h	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

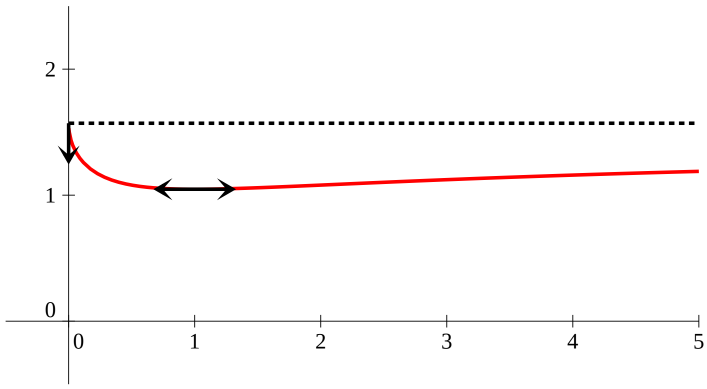
Calcul des valeurs intéressantes : $f(0) = 1^3 + 0^3 = 1$; $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \dfrac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{2\sqrt{2}}{8} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; les deniers calculs sont extrêmement similaires. On peut enfin tracer une fort belle courbe :



- La fonction i ne peut être définie que si $x \geqslant 0$ (à cause de la racine carrée) et si $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x} \in [-1; 1]$ à cause du arccos. Puisqu'on a déjà supposé $x \geqslant 0$, cela revient à dire qu'on doit avoir $\sqrt{x} \leqslant 1+x$, soit en élevant au carré $x \leqslant 1 + 2x + x^2$, ce qui est toujours le cas. On a donc $\mathcal{D}_i = \mathbb{R}^+$. On peut dériver la fonction i, ce qui donne $i'(x) = \dfrac{\frac{1+x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(1+x)^2} \times \dfrac{-1}{\sqrt{1 - \frac{x}{(1+x)^2}}} = -\dfrac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2} \times \dfrac{1+x}{\sqrt{(1+x)^2 - x}} = \dfrac{x-1}{2\sqrt{x}(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$. On peut constater en passant que la fonction i n'est pas dérivable en 0 (il y aura une tangente verticale puisque la dérivée y a une limite infinie), et la dérivée, bien qu'assez laide, est simplement du signe de $x - 1$. La fonction admet donc un minimum en 1, de valeur $i(1) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$. Par ailleurs, $f(0) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = 0$, on aura également $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = \frac{\pi}{2}$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
i	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{3}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Et tracer une dernière et magnifique courbe :



Exercice 6 (**)

1. Reprenez la construction donnée dans le cours, à l'aide du cercle trigonométrique, du sinus et de la tangente. On peut tout interpréter en termes de longueur : $\sin(h)$ (remplacez le x du cours par un h) est la hauteur du triangle intérieur au cercle, dont les sommets sont O, M et le point I de coordonnées $(1, 0)$. La valeur de $\tan(h)$ est la hauteur du triangle extérieur au cercle et tangent extérieurement au point I. Quant à x, c'est par définition la longueur de l'arc de cercle reliant le point I à M. Ainsi, l'aire du petit triangle vaut $\frac{1}{2}\sin(h)$, celle du triangle extérieur vaut $\frac{1}{2}\tan(h)$, et la portion de disque contenue entre les deux a pour aire $\pi \times \frac{h}{2\pi} = \frac{h}{2}$. En multipliant tout par 2, on obtient $\sin(h) \leqslant h \leqslant \tan(h)$.
2. L'inégalité de droite a déjà été prouvée. Celle de gauche s'obtient en partant de $h \leqslant \tan(h)$ et en mulptiliant de chaque côté par $\cos(h)$. En divisant tout cela par h, on a alors $\cos(h) \leqslant \frac{\sin(h)}{h} \leqslant 1$. Comme $\cos(0) = 1$, $\frac{\sin(h)}{h}$ est enacdré par deux expressions tendant vers 1 en 0, donc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$.
3. Puisque $\sin(0) = 0$, on en déduit facilement que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin^2(h)}{h} = 0$. Or, $\frac{\sin^2(h)}{h} = \frac{1-\cos^2(h)}{h} = (1+\cos(h))\frac{1-\cos(h)}{h}$. Le premier terme ayant pour limite 2 en 0, le deuxième doit nécessairement avoir une limite nulle pour que le produit tende vers 0.
4. Revenons à la définition de la dérivée : le taux d'accroissement du cos en x vaut $\tau_x(h) = \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$. En utilisant les formules d'addition, on trouve $\tau_x(h) = \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} = \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h}$. Le premier quotient tend vers 0, le deuxième vers 1, donc $\lim\limits_{h\to 0} \tau_x(h) = -\sin(x)$, ce qui donne bien la dérivée

que vous connaissez par coeur pour le cosinus.

5. Même principe, cette fois-ci $\tau_x(h) = \dfrac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \dfrac{\cos(x)\sin(h) + \sin(x)\cos(h) - \sin(x)}{h} = \cos(x)\dfrac{\sin(h)}{h} + \sin(x)\dfrac{1-\cos(h)}{h}$. Les mêmes limites que tout à l'heure permettent de conclure.

Exercice 7 (**)

1. Il faut bien évidemment que $x \in [-1,1]$ pour que $\arcsin(x)$ soit défini. De plus, on a la condition $\dfrac{1+x}{1-x} \geqslant 0$ (la fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, ce sera la seule condition supplémentaire), ce qui est le cas si $x \in [-1,1[$ (un petit tableau de signes si besoin). Finalement, $\mathcal{D}_f = [-1,1[$.
2. Pour dériver, procédons par étapes. En posant $g(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, on obtient d'abord $g'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}$. On compose ensuite par la racine carrée pour obtenir $\dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} = \dfrac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$. Il ne reste plus qu'à ajouter l'arctangente pour obtenir la deuxième moitié de la dérivée de f : $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{2}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}} \times \dfrac{1}{1+\frac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{2}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}} \times \dfrac{1-x}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} = 0$. La fonction f est donc constante. Comme $f(0) = \arcsin(0) - 2\arctan(1) = -\dfrac{\pi}{2}$, on en déduit que, $\forall x \in [-1,1[$, $f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$.
3. Posons donc $x = \cos(\theta)$ (ce qui est certainement faisable puisque $x \in [-1,1[$. On peut alors écrire $\arcsin(x) = \arcsin(\cos(\theta)) = \dfrac{\pi}{2} - \arccos(\cos(\theta)) = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ (on peut toujours choisir $\theta \in [0,\pi]$). Par ailleurs, $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{1+\cos(\theta)}{1-\cos(\theta)} = \dfrac{(1+\cos(\theta))^2}{1-\cos^2(\theta)} = \dfrac{(1+\cos(\theta))^2}{\sin^2(\theta)}$, donc $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ (sur $[0,\pi]$, le sinus est nécessairement positif). Avec un bon feeling, ou plutôt en regardant bien ce qu'on veut obtenir à la fin, on peut alors penser à tout exprimer en fonction de l'angle $\dfrac{\theta}{2}$: les formules de duplication assurent que $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - 1$, et $\sin(\theta) = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, on en déduit que $\dfrac{1+\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \dfrac{2\cos^2(\frac{\theta}{2})}{2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})} = \dfrac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} = \dfrac{1}{\tan(\frac{\theta}{2})}$. En utilisant l'une des nombreuses formules du cours, $\dfrac{1}{\tan(\frac{\theta}{2})} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}\right)$, ce qui permet, en ajoutant l'arctangente, de simplifier $f(x)$ sous la forme $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \theta - 2\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$. On retrouve le même résultat qu'à la question précédente.

Exercice 8 (***)

1. La fonction cos étant définie sur $\mathbb{R}$, le domaine de définition de T_n est le même que celui de la fonction arccos, c'est-à-dire le segment $[-1,1]$.
2. Calculons : $T_n(1) = \cos(n\arccos(1)) = \cos(0) = 1$; $T_n(0) = \cos(n\arccos(0)) = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ (qui vaut 0 si n est impair, 1 si n est multiple de 4 et -1 si n est pair mais pas multiple de 4) ; et $T_n(-1) = \cos(n\pi) = (-1)^n$.
3. Si $x \in [0,\pi]$, on peut simplifier $\arccos(\cos(x))$ pour trouver $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$, donc $g(x) = 0$. De plus, g est une fonction paire, car cos est paire, elle s'annule donc aussi sur $[-\pi, 0]$. Enfin,

g est 2π-périodique tout comme cosinus, donc, étant nulle sur une période, elle est toujours nulle. Cela prouve bien que $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.

4. C'est du simple calcul : $T_0(x) = \cos(0) = 1$ (polynôme constant) ; $T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x$ (dans ce sens-là, ça marche toujours, du moins bien évidemment pour les valeurs de x pour lesquelles arccos est définie) ; $T_2(x) = \cos(2\arccos(x)) = 2\cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$ en utilisant les formules de duplication ; et $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ de même, en utilisant cette fois la formule de triplication du cosinus.
5. (a) Le plus simple est de partir de la formule de transformation produit-somme appliquée avec $b = (n+1)a$, ce qui donne $\cos(a)\cos((n+1)a) = \dfrac{1}{2}(\cos(a+(n+1)a)+\cos((n+1)a-a)) = \dfrac{1}{2}(\cos((n+2)a) - \cos(na))$. La formule demandée en découle immédiatement.
   (b) On applique tout simplement la formule précédente en choisissant $a = \arccos(x)$ (et on simplifie bien sûr le $\cos(\arccos(x))$ en x).
   (c) Encore du calcul bête : $T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$; puis $T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$; et enfin $T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$.
6. Il faut simplement chercher les valeurs de x pour lesquelles $n\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}+k\pi = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, ce qui revient bien à dire que $x = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$. La seule chose à comprendre, c'est qu'on peut se restreindre aux valeurs de k comprises entre 0 et $n-1$, mais pour les autres valeurs de k, on va tout simplement retomber sur les mêmes valeurs du cosinus ! Par exemple $\cos\left(\dfrac{(2n+1)\pi}{2n}\right) = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{2n}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{2n}\right) = \cos\left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2n}\right)$. De toute façon, les valeurs de x_k, pour k compris entre 0 et $n-1$, sont toutes distinctes (ce sont des cosinus d'angles distincts compris entre 0 et π), et T_n, qui est un polynôme de degré n, ne peut pas avoir plus de n racines distinctes.

Problème

I. Calcul de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

1. (a) On sait que $\cos(2x) = 2\cos^2(x)-1$, donc $\cos(4x) = 2\cos^2(2x)-1 = 2(2\cos^2(x)-1)^2-1 = 2(4\cos^4(x) - 4\cos^2(x) + 1) - 1 = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$.
   (b) En posant $x = \dfrac{\pi}{5}$, on aura $4x = \dfrac{4\pi}{5} = \pi - x$, donc $\cos(4x) = -\cos(x)$. Au vu de la relation précédente, on a donc $8\alpha^4 - 8\alpha^2 + 1 = -\alpha$, soit $8\alpha^4 - 8\alpha^2 + x + 1 = 0$.
   (c) La racine la plus évidente est -1 : $8(-1)^4 - 8(-1)^2 - 1 + 1 = 0$. On peut donc factoriser : $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = (x+1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) = ax^4 + (a+b)x^3 + (b+c)x^2 + (c+d)x + d$. On a donc $a = 8$; $a + b = 0$, soit $b = -8$; $b + c = -8$ soit $c = 0$; $c + d = 1$ soit $d = 1$. Soit $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = (x + 1)(8x^3 - 8x^2 + 1)$. Reste à trouver une deuxième racine, $x = \dfrac{1}{2}$ convient puisque $\dfrac{8}{8} - \dfrac{8}{4} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$. On peut donc à nouveau factoriser : $8x^3 - 8x^2 + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)(ex^2 + fx + g) = ex^3 + \left(f - \dfrac{1}{2}e\right)x^2 + \left(g - \dfrac{1}{2}f\right)x - \dfrac{1}{2}g$. Par identification, on obtient $e = 8$; $f - \dfrac{1}{2}e = -8$, soit $f = -4$; $g - \dfrac{1}{2}f = 0$ soit $g = -2$. Finalement, $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = (x + 1)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(8x^2 - 4x - 2)$.
   (d) Déterminons les racines du dernier facteur obtenu ci-dessus. Le trinome $4x^2 - 2x - 1$ (on peut factoriser par 2) a pour discriminant $\Delta = 4 + 16 = 20$, et admet deux racines

$x_1 = \dfrac{2+\sqrt{20}}{8} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$. La valeur de α est donc celle d'une des quatre racines trouvées pour l'équation. Ce n'est sûrement pas -1 puisque $\alpha > 0$ (c'est le cosinus d'un angle inférieur à $\dfrac{\pi}{2}$), pas non plus x_2 qui est également négative, et ça ne peut pas être $\dfrac{1}{2}$ puisqu'on sait qu'il s'agit du cosinus de l'angle $\dfrac{\pi}{3}$, et que la fonction cosinus ne peut pas prendre deux fois cette valeur avant $\dfrac{\pi}{2}$. Finalement, $\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

2. (a) Prenons plutôt les choses à l'envers : $\sin(4x) = 2\sin(2x)\cos(2x) = 4\sin(x)\cos(x)(2\cos^2(x)-1) = 2\sin(x)(4\cos^2(x) - 2\cos(x))$, donc pour tous les angles vérifiant $\sin(x) \neq 0$, $\dfrac{\sin(4x)}{2\sin(x)} = 4\cos^2(x) - 2\cos(x) = \cos(3x) + \cos(x)$ puisqu'on sait que $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.

   (b) On a donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) = \dfrac{\sin(\frac{4\pi}{5})}{2\sin(\frac{\pi}{5})}$. Or, $\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$. Finalement, $\alpha + \cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{2}$.

   (c) À l'aide de la formule de transformation d'un produit en somme, $\alpha \times \cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) + \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{-2\pi}{5}\right)$. Or, $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$; et de même $\cos\left(-\dfrac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$. Au vu du résultat de la question précédente, on a donc $\alpha\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$.

   (d) Le réel α est donc solution de l'équation $x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$, dont le discriminant est $\Delta = \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{5}{4}$, et qui admet pour racines $x_1 = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$. Comme dans la première partie de l'exercice, on conclut pour des raisons de signe que $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. On a au passage prouvé que $\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.

II. Même chose avec $\cos\left(\dfrac{\pi}{17}\right)$!

1. Si $\sin\left(\dfrac{h}{2}\right) = 0$, c'est que $\dfrac{h}{2} \equiv 0[\pi]$, donc $h \equiv 0[2\pi]$. Mais alors on a , pour tout entier k, $\cos(a+kh) = \cos(a)$ et $\sin(a+kh) = \sin(a)$, donc $S_n(a,h) = n\sin(a)$ et $C_n(a,h) = n\cos(a)$.
2. Je donne le calcul avec les complexes car c'est quand même plus agréable : $C_n(a,h) + iS_n(a,h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kh)} = e^{ia}\frac{1-e^{inh}}{1-e^{ih}} = e^{ia}\frac{e^{i\frac{nh}{2}}2i\sin(\frac{nh}{2})}{e^{i\frac{h}{2}}2i\sin(\frac{h}{2})} = e^{i(a+(n-1)\frac{h}{2})}\frac{\sin(\frac{nh}{2})}{\sin(\frac{h}{2})}$. Il ne reste plus qu'à prendre les parties réelle et imaginaire pour obtenir les formules demandées.
3. Parmi les quatre cosinus dont x_1 est la somme, seul le dernier est négatif puisque $\dfrac{3\pi}{17} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{5\pi}{17} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\dfrac{7\pi}{17} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $\cos\left(\dfrac{11\pi}{17}\right) = -\cos\left(\dfrac{6\pi}{17}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{6\pi}{17}\right) < \cos\left(\dfrac{5\pi}{17}\right)$, donc $\cos(5\theta) + \cos(11\theta) > 0$, et x_1, obtenu en ajoutant encore deux termes positifs, est bien positif.
4. La somme $x_1 + x_2$ est exactement de la forme $C_n(a,h)$, avec $a = \theta$, $h = 2\theta$ et $n = 8$. D'après la question 2, on a donc $x_1 + x_2 = \dfrac{\sin(8\theta)\cos(8\theta)}{\sin(\theta)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(16\theta)}{\sin(\theta)}$. Mais $16\theta = \dfrac{16\pi}{17} = \pi - \theta$, donc

$\sin(16\theta) = \sin(\theta)$ et $x_1 + x_2 = \dfrac{1}{2}$.

5. Il faut y croire :

$$\begin{array}{rcl} x_1x_2 & = & \cos(3\theta)\cos(\theta) + \cos(3\theta)\cos(9\theta) + \cos(3\theta)\cos(13\theta) + \cos(3\theta)\cos(15\theta) \\ & + & \cos(5\theta)\cos(\theta) + \cos(5\theta)\cos(9\theta) + \cos(5\theta)\cos(13\theta) + \cos(5\theta)\cos(15\theta) \\ & + & \cos(7\theta)\cos(\theta) + \cos(7\theta)\cos(9\theta) + \cos(7\theta)\cos(13\theta) + \cos(7\theta)\cos(15\theta) \\ & + & \cos(11\theta)\cos(\theta) + \cos(11\theta)\cos(9\theta) + \cos(11\theta)\cos(13\theta) + \cos(11\theta)\cos(15\theta) \end{array}$$

On utilise les formules de transformation produit/somme et on obtient x_1x_2, comme sommes des cosinus des 32 angles suivants (on peut oublier les signes puisques le cos est pair) : 4θ, 2θ, 12θ, 6θ, 16θ, 10θ, 18θ, 12θ, 6θ, 4θ, 14θ, 4θ, 18θ, 8θ, 20θ, 10θ, 8θ, 6θ, 16θ, 2θ, 20θ, 6θ, 22θ, 8θ, 12θ, 10θ, 20θ, 2θ, 24θ, 2θ, 26θ et 4θ. Or, $26\theta \equiv -8\theta[2\pi]$, donc $\cos(26\theta) = \cos(8\theta)$. De même, $\cos(24\theta) = \cos(10\theta)$, $\cos(22\theta) = \cos(12\theta)$, $\cos(20\theta) = \cos(14\theta)$ et $\cos(18\theta) = \cos(16\theta)$. En regroupant tout ceci, on obtient $x_1x_2 = 2(\cos(2\theta) + \cos(4\theta) + \cos(6\theta) + \cos(8\theta) + \cos(10\theta) + \cos(12\theta) + \cos(14\theta) + \cos(16\theta))$. La parenthèse vaut $C_8(2\theta, 2\theta) = \dfrac{\sin(8\theta)\cos(9\theta)}{\sin(\theta)}$, avec $\cos(9\theta) = \cos(\frac{\pi}{2} - 8\theta) = -\cos(8\theta)$, d'où $x_1x_2 = -2(x_1 + x_2) = -1$.

6. On connait la somme et le produit de x_1 et x_2, ils sont solutions de l'équation $x^2 - \dfrac{1}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 2 = 0$, de discriminant $1 + 16 = 17$. Comme on l'a vu plus haut, $x_1 > 0$, donc on a $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$.

7. Allons-y : $y_1y_2 = \cos(3\theta)\cos(7\theta) + \cos(3\theta)\cos(11\theta) + \cos(5\theta)\cos(7\theta) + \cos(5\theta)\cos(11\theta) = \dfrac{1}{2}(\cos(10\theta) + \cos(4\theta) + \cos(14\theta) + \cos(8\theta) + \cos(12\theta) + \cos(2\theta) + \cos(16\theta) + \cos(6\theta)) = \dfrac{1}{4}x_1x_2 = -\dfrac{1}{4}$.
De même, $y_3y_4 = \cos(\theta)\cos(9\theta) + \cos(\theta)\cos(15\theta) + \cos(13\theta)\cos(9\theta) + \cos(13\theta)\cos(15\theta) = \dfrac{1}{2}(\cos(10\theta) + \cos(8\theta) + \cos(16\theta) + \cos(14\theta) + \cos(22\theta) + \cos(4\theta) + \cos(28\theta) + \cos(2\theta)) = -\dfrac{1}{4}$ (après simplifications similaires à celles faites pour x_1x_2).

8. y_1 et y_2 ayant pour somme x_1 et produit $-\dfrac{1}{4}$, ils sont solutions de l'équation $x^2 - x_1x - \dfrac{1}{4}$, donc le discriminant vaut $x_1^2 + 1 = \dfrac{1}{2}x_1 + 2 = \dfrac{17+\sqrt{17}}{8}$ et les solutions $\dfrac{1+\sqrt{17} \pm \sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}$. La solution positive est égale à y_1, car y_2 est somme de deux cosinus négatifs. De même, on obtient $y_3 = \dfrac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$ et $y_4 = \dfrac{1-\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$.

9. De plus en plus facile : $\cos(\theta)\cos(13\theta) = \dfrac{1}{2}(\cos(14\theta) + \cos(12\theta)) = \dfrac{1}{2}(-\cos(5\theta) - \cos(3\theta)) = -\dfrac{y_1}{2}$. Comme de plus $\cos(\theta) + \cos(13\theta) = y_3$, les réels $\cos(\theta)$ et $\cos(13\theta)$ sont solutions de l'équation $x^2 - y_3x - \dfrac{y_1}{2}$, $\cos(\theta)$ étant la solution positive. Le discriminant de l'équation vaut $y_3^2 + 2y_1 = \dfrac{1+17+34-2\sqrt{17}-2\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{578-34\sqrt{17}}}{64} + \dfrac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4} = \dfrac{68+12\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\sqrt{578-34\sqrt{17}}}{64}$ et on a ensuite $\cos\left(\dfrac{\pi}{17}\right) = \dfrac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\sqrt{578-34\sqrt{17}}}}{16}$.
Étonnant, non ?