

Feuille d'exercices n°18 : Matrices et algèbre linéaire

PTSI B Lycée Eiffel

4 mai 2015

Exercice 1 (*)

Déterminer la matrice dans la base canonique de l'espace vectoriel E des applications linéaires suivantes (on ne vérifiera pas la linéarité) :

1. $f(x, y, z) = (x + y - 2z, 2x + y - z, -x - 3y + 2z)$; $E = \mathbb{R}^3$
2. $f(P) = (2X + 1)P - X^2P'$; $E = \mathbb{R}_2[X]$
3. $f(P) = \int_X^{X+2} P(t) dt$; $E = \mathbb{R}_2[X]$
4. $f(M) = AM + MB$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2 (*)

Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Prouver que s est une symétrie, et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 3 (**)

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ de l'application f qui, à un polynôme P , associe le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - X + 1$. Vérifier à l'aide de cette matrice que f est un projecteur, et en déterminer les éléments caractéristiques.

Exercice 4 (**)

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = (X^2 + X + 1)P' - (2X - 1)P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme, et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. L'application φ est-elle bijective? Déterminer un antécédent par φ de $X^2 - 1$.
3. Résoudre l'équation différentielle $(x^2 + x + 1)y' - (2x - 1)y = x^2 - 1$.

Exercice 5 (***)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ un morphisme vérifiant $u^2 + u + id = 0$.

1. Montrer que u est bijectif, et déterminer u^{-1} en fonction de u .
2. Montrer que, pour tout vecteur non nul x , $\text{Vect}(x, u(x))$ est de dimension 2.

3. Prouver l'existence d'une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (**)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f devient $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les puissances de la matrice B , puis celles de A .

Exercice 7 (**)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(M - I)(M + 3I) = 0$.
2. En déduire que $\ker(f - id) \oplus \ker(f + 3id) = \mathbb{R}^3$.
3. Donner la dimension et une base de chacun des deux noyaux de la question précédente.
4. Sans faire de calculs, déterminer une base dans laquelle la matrice de f est diagonale (et donner cette matrice).

Exercice 8 (***)

On considère trois suites (x_n) , (y_n) et (z_n) définies par leurs premiers termes x_0, y_0, z_0 et les relations suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{2}(-x_n - 3y_n + 6z_n)$; $y_{n+1} = \frac{1}{2}(3x_n + 5y_n - 6z_n)$ et $z_{n+1} = \frac{1}{2}(3x_n + 3y_n - 4z_n)$.

1. Montrer que ce système peut s'écrire sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et X_n, X_{n+1} sont des matrices colonnes.
2. Déterminer $S_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$ et $S_{-2} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X\}$.
3. Montrer que S_1 et S_{-2} sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en donner des bases.
4. En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice A^n et en déduire X^n en fonction de X_0 .

Exercice 9 (*)

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on note \mathcal{B} la famille $(X^2 + 1; X + 1; 2X^2 - X)$.

1. Vérifier que \mathcal{B} est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de passage de la base canonique vers la base \mathcal{B} , et celle de \mathcal{B} vers la base canonique.
3. Déterminer les coordonnées du polynôme $P = X^2 - X + 2$ dans la base \mathcal{B} .

4. On considère l'endomorphisme de E défini par $\varphi(P) = XP'$. Déterminer sa matrice dans la base canonique, puis dans la base \mathcal{B} .

Exercice 10 (**)

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 . Que peut-on en déduire sur f ?
2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\text{Im}(f)$.
3. Donner la matrice de f dans une base constituée uniquement de vecteurs de $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 11 (* à **)

Calculer les déterminants suivants (en essayant d'utiliser des développements suivant les lignes ou les colonnes ou des combinaisons pour faire apparaître des 0 ; vous pouvez toujours vérifier vos résultats ensuite avec Sarrus) :

$$\begin{array}{ll} \bullet \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} & \bullet \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \bullet \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} & \bullet \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} \\ \bullet \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} & \bullet \begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix} \end{array}$$

Exercice 12 (***)

Calculer le déterminant de la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $m_{i,i} = 0$ pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, et $m_{i,j} = 1$ si $j \neq i$ (on pourra chercher une relation de récurrence entre ces différents déterminants).

Exercice 13 (***)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Pour un réel λ quelconque, calculer $\det(A - \lambda I)$.
2. En déduire les valeurs de λ pour lesquelles ce déterminant est nul.
3. Donner une base de $\ker(f - \lambda id)$ pour les valeurs de λ obtenues à la question précédente. Pourquoi était-il déjà certain qu'aucun de ces noyaux ne serait réduit au vecteur nul ?
4. En déduire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.