

Feuille d'exercices n°13 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

5 mars 2015

Exercice 1 (**)

- On effectue une intégration par parties en posant $v'(x) = x^2$ et $u(x) = \ln x$, donc $v(x) = \frac{x^3}{3}$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$, pour obtenir $I_1 = \int_1^e x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} \, dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9} \right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}$.
- Sur $[1; e]$, $0 \leq \ln x \leq 1$, donc $0 \leq (\ln x)^{n+1} \leq (\ln x)^n$. En découle $0 \leq x^2 (\ln x)^{n+1} \leq x^2 (\ln x)^n$, puis par intégration $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. La suite (I_n) est décroissante.
- La suite est décroissante minorée par 0, elle converge.
- Le plus simple est d'étudier la fonction $f : x \mapsto \ln x - \frac{x}{e}$. On a $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, qui est positif sur l'intervalle $[1; e]$. La fonction f est donc croissante sur $[1; e]$, et $f(e) = 0$, donc f est négative sur $[1; e]$. On en déduit que $I_n \leq \int_1^e x^2 \left(\frac{x}{e}\right)^n = \frac{1}{e^n} \int_1^e x^{n+2} \, dx = \frac{1}{e^n(n+3)}$. La majoration calculée tendant vers 0, le théorème des gendarmes s'applique, et (I_n) converge vers 0.
- Il s'agit bien sûr d'une intégration par parties, avec $u'(x) = x^2$ et $v(x) = (\ln x)^{n+1}$:
$$I_{n+1} = \left[\frac{x^3}{3} (\ln x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} (n+1) (\ln x)^n = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$$
. En faisant tendre n vers $+\infty$, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{3} I_n = \frac{e^3}{3}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^3 - I_n = e^3$.

Exercice 2 (**)

- Calculons donc : $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t} \, dt = [\ln(2+t)]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right) (\simeq 0.4)$; $u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+2t} \, dt = \left[\frac{1}{2} \ln(1+2t) \right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2} (\simeq 0.55)$; enfin, $u_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2} \, dt = \int_0^1 \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \, dt = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))^2 + 1} \, dt = \frac{4}{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right) \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} (\simeq 0.6)$.
- Pour tout t dans $[0; 1]$, on a $t^{n+1} \leq t^n$, donc $1+t+t^{n+1} \leq 1+t+t^n$ puis (tout étant positif) $\frac{1}{1+t+t^{n+1}} \geq \frac{1}{1+t+t^n}$. En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on obtient $u_{n+1} \geq u_n$, la suite (u_n) est donc croissante.
- Il faut réussir à majorer intelligemment ce qui se trouve sous l'intégrale, en l'occurrence en constatant que $\forall t \in [0; 1]$, $1+t+t^n \geq 1+t$, donc $\frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{1+t}$. En intégrant l'inégalité,

on obtient $u_n \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$ (la majoration doit être guidée par le fait qu'on veut obtenir $\ln(2)$ à la fin).

4. La suite (u_n) est donc croissante et majorée, elle converge.

5. En utilisant le calcul fait un peu plus haut, on a $\ln 2 - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

6. Il suffit d'arriver à majorer ce qui se trouve sous l'intégrale : $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} = \frac{1+t+t^n - (1+t)}{(1+t)(1+t+t^n)} = \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}$. Or, ce magnifique dénominateur est certainement plus grand que 1 quand $t \in [0; 1]$, donc $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} \leq t^n$, et en intégrant cette inégalité on a $\ln 2 - u_n \leq \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

7. On a vu plus haut que $u_n \leq \ln 2$, donc $\ln 2 - u_n \geq 0$. Comme on vient de majorer par ailleurs cette même expression par quelque chose qui tend vers 0, un coup de théorème des gendarmes nous donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 2 - u_n) = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2$.

Exercice 3 (*)

1. Allons-y : $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$, puis $I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t} dt = 1 - I_0 = 1 - \ln(2)$, et enfin $I_2 = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^2+t}{1+t} - \frac{t}{1+t} dt = \int_0^1 t dt - I_1 = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 - (1 - \ln(2)) = \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) = \ln(2) - \frac{1}{2}$.

2. Même pas besoin de s'embêter à déterminer la monotonie de la suite (qui est en l'occurrence décroissante) : comme $\frac{1}{1+t} \leq 1$ sur $[0, 1]$, on peut encadrer I_n en écrivant $0 \leq I_n \leq \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème des gendarmes pour conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

3. Pour une fois, inutile de faire une intégration par parties, il vaut mieux procéder astucieusement en généralisant les calculs de la première question : $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{n+1}+t^n}{1+t} dt - I_n = \int_0^1 t^n dt - I_n = \frac{1}{n+1} - I_n$.

4. Méthode « avec les mains » : $I_0 = 1 - I_1 = 1 - \frac{1}{2} + I_2 = \dots = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} + (-1)^n I_n$.
Autrement dit, $\ln(2) = S_n + (-1)^n I_n$, ou encore $S_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n$.

5. Il n'y a plus rien à faire d'autre que de constater : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(2)$.

Exercice 4 (***)

Je vous sens tous venir avec votre récurrence, oubliez-là, ça ne sert à rien. Observer ce qui se passe pour les petites valeurs de n peut être utile. Ainsi, pour $n = 0$, le résultat est une conséquence

du fait qu'une fonction (non nulle) de signe constant sur un intervalle ne peut pas avoir une intégrale nulle. Pour $n = 1$, raisonnons par l'absurde en supposant que f ne s'annule qu'une seule fois, disons en c . Alors la fonction est (par exemple) strictement positive sur $[0, c]$ et strictement négative sur $[c, 1]$ (si c'est le contraire, on prend $-f$ qui vérifie également les hypothèses de l'énoncé). L'astuce est alors de constater que la fonction $g : t \mapsto (c - t)f(t)$ est de signe constant sur $[0, 1]$, en l'occurrence positive (puisque les deux facteurs sont positifs si $t \leq c$ et les deux sont positifs si $t \geq c$). Pourtant, $\int_0^1 (t - c)f(t) dt = \int_0^1 tf(t) dt - c \int_0^1 f(t) dt = 0 - c \times 0 = 0$. La fonction n'étant pas tout le temps nulle sur $[0, 1]$, on tient une absurdité.

Généralisons ce résultat, en raisonnant par l'absurde dans le cas général. Supposons que f s'annule exactement n fois (si elle s'annule moins, c'est encore plus facile) en $c_1 < c_2 < \dots < c_n$ en changeant de signe à chaque fois (si f ne change pas de signe, on enlève purement et simplement la valeur correspondante). Notons alors $P = (t - c_1)(t - c_2) \dots (t - c_n)$. Ce polynôme change lui aussi de signe en c_1, c_2, \dots, c_n , dont le produit $Pf(t)$ est de signe constant sur $[0, 1]$. Pourtant, son intégrale est nulle. En effet, quel que soit le polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de degré n (ou moins), par linéarité de

l'intégrale, $\int_0^1 P(t)f(t) dt = \sum_{k=0}^n a_k \int_0^1 t^k f(t) dt = 0$. Là encore, on a une contradiction, la fonction f ne peut donc pas s'annuler moins de $n + 1$ fois.

Exercice 5 (*)

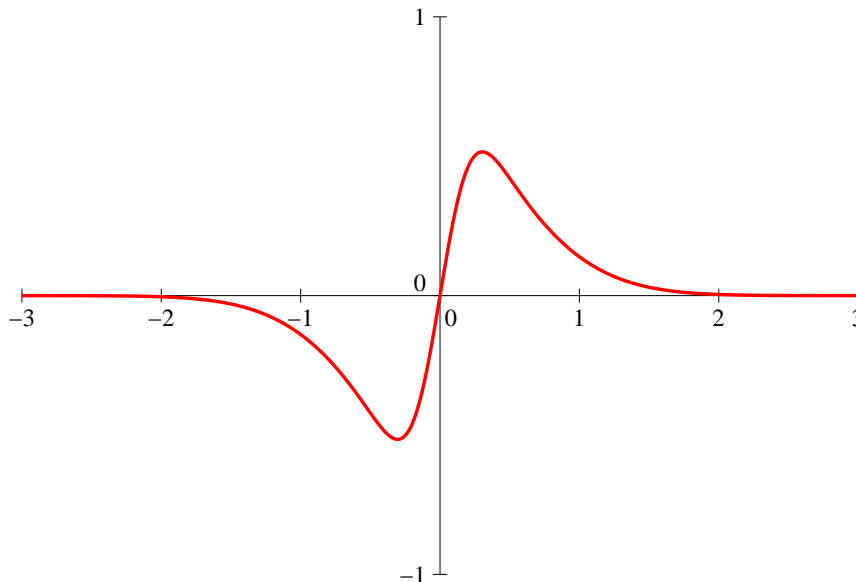
1. La fonction f est la primitive de $\frac{e^x}{x}$ s'annulant en 1. Elle est donc dérivable sur \mathbb{R}_+^* de dérivée $f'(x) = \frac{e^x}{x}$. Cette dérivée étant positive sur \mathbb{R}_+^* , f y est croissante.
2. La fonction g est définie et dérivable sur \mathbb{R}_+^* , de dérivée $g'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{e^x - 1}{x}$. Cette dérivée est positive sur \mathbb{R}_+^* , donc g y est croissante. Comme $g(1) = f(1) - \ln 1 = 0$, la fonction g est donc négative sur $]0; 1[$ et positive sur $]1; +\infty[$ ($f(1) = 0$ car on effectue alors une intégrale sur l'intervalle $]1; 1[$).
3. D'après la question précédente, on a $f(x) \leq \ln x$ sur $]0; 1[$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$; de même, $f(x) \geq \ln x$ si $x \geq 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 6 (***)

- La fonction f est définie sur \mathbb{R} puisque la fonction qu'on intègre est définie partout. Par ailleurs, la fonction intégrée est paire, ce qui permet de prouver que f est impaire : en faisant le changement de variables $u = -t$, $f(-x) = \int_{-x}^{-4x} e^{-t^2} dt = \int_x^{4x} -e^{-u^2} du = -f(x)$. En notant $g(t) = e^{-t^2}$ et G une primitive de g , on peut écrire $f(x) = G(4x) - G(x)$, donc $f'(x) = 4g(4x) - g(x) = 4e^{-16x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2}(4e^{-15x^2} - 1)$. La dérivée s'annule lorsque $e^{-15x^2} = \frac{1}{4}$, soit $-15x^2 = -2 \ln(2)$, donc $x = \pm \sqrt{\frac{2 \ln(2)}{15}}$. La seule limite à calculer est en $+\infty$, si $x \geq 0$ on peut majorer e^{-t^2} par e^{-x^2} sur $[x, 4x]$, donc $0 \leq f(x) \leq \int_x^{4x} e^{-x^2} dt = 3xe^{-x^2}$, qui a une limite nulle en $+\infty$ par croissance comparée. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. On peut résumer ces informations dans le tableau de variations suivant (inutile d'essayer de calculer les valeurs des extrema, on note x_1 et $-x_1$ leurs abscisses pour simplifier) :

x	$-\infty$	$-x_1$	0	x_1	$+\infty$
f	0	$-f(x_1)$	0	$f(x_1)$	0

Et voici une allure de la courbe :

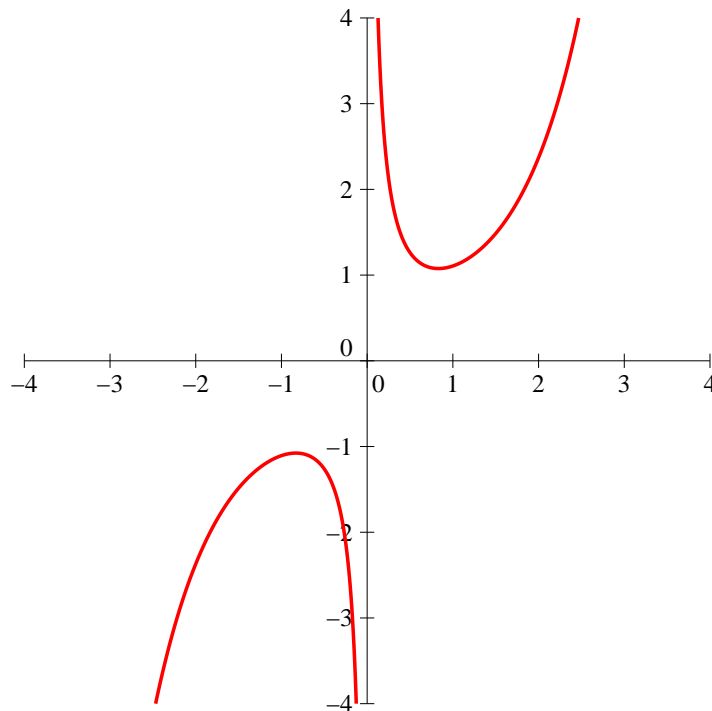


- Les techniques seront toujours les mêmes. Ici, la fonction à intégrer est définie sur \mathbb{R}^* (et n'est pas prolongeable par continuité en 0), donc g sera définie également sur \mathbb{R}^* (si $x \neq 0$, $0 \notin [x, 2x]$). La fonction g est par ailleurs impaire comme intégrale d'une fonction paire, comme on vient de le prouver pour la fonction précédente. On se contentera donc d'étudier la fonction g sur \mathbb{R}^{+*} . On dérive comme d'habitude : en posant $f(t) = \frac{\text{ch}(t)}{t^2}$ et F une primitive de f , alors $g(x) = F(2x) - F(x)$, donc $g'(x) = 2f(2x) - f(x) = \frac{\text{ch}(2x) - 2\text{ch}(x)}{2x^2}$. Or, $\text{ch}(2x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - 2}{2} = 2\text{ch}^2(x) - 1$, donc $g'(x)$ est du signe de $2\text{ch}^2(x) - 2\text{ch}(x) - 1$. En posant $X = \text{ch}(x)$, on est ramenés à la résolution de l'équation $2X^2 - 2X - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 12$, et admet pour racines $X_1 = \frac{2 + \sqrt{12}}{4} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$, et $X_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$. On ne garde que la première racine, la seconde étant plus petite que 1 et ne pouvant convenir comme valeur de $\text{ch}(x)$. On est maintenant ramenés à résoudre l'équation $\text{ch}(x) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$, soit $e^x + e^{-x} = 1 + \sqrt{3}$. En posant cette fois-ci $X = e^x$, on se retrouve à devoir résoudre $X^2 - (1 + \sqrt{3})X + 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = (1 + \sqrt{3})^2 - 4 = 2\sqrt{3}$, et pour racines $X_3 = \frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$, et $X_4 = \frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$. La deuxième valeur est inférieure à 1 car $2\sqrt{3} > 3$, donc mènera à une valeur de x négative qui ne nous intéresse pas (qui est en fait l'opposé de celle qu'on va garder). On se contentera de garder comme valeur d'annulation de g' le nombre $x_0 = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\right)$. Ouf! Évidemment, voilà encore une valeur pour laquelle on sera incapable de déterminer ne serait-ce qu'une valeur approchée du maximum. On peut par contre déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$: $\forall t \in [x, 2x]$, $\text{ch}(x) \leq \text{ch}(t) \leq \text{ch}(2x)$, et $\frac{1}{4x^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{x^2}$, donc $\frac{\text{ch}(x)}{4x^2} \leq f(t) \leq \frac{\text{ch}(2x)}{x^2}$, puis par intégration sur le segment

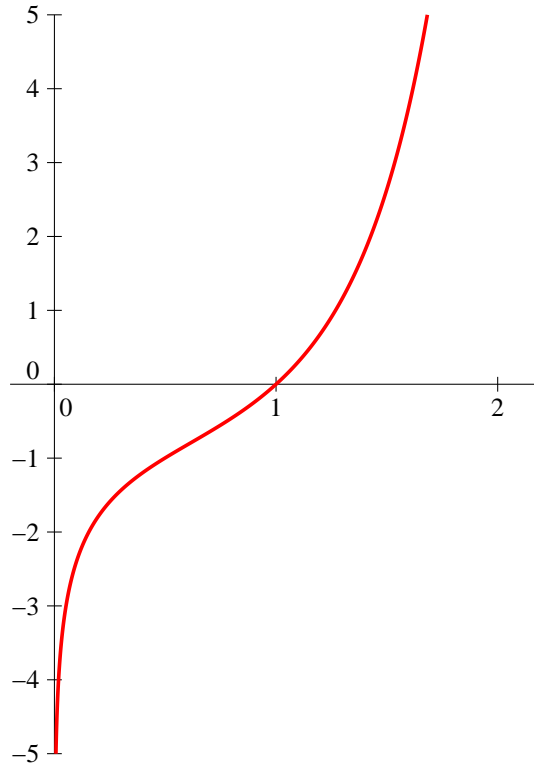
$[x, 2x], \frac{\text{ch}(x)}{4x} \leq g(x) \leq \frac{\text{ch}(2x)}{x}$. Par croissance comparée, le membre de gauche tend vers $+\infty$ en $+\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (il y aura même une branche parabolique de direction (Oy)). En 0, chacun des deux membres tend vers $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. On en déduit évidemment les limites en 0^- et en $-\infty$ par imparité de la fonction, et on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-x_0$	0	x_0	$+\infty$
g			$+\infty$		$+\infty$
		$-f(x_0)$		$f(x_0)$	
	$-\infty$				$-\infty$

Et une allure de la courbe :



- Et une dernière pour la route, la fonction $f : t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est définie sur \mathbb{R}^* (et n'est pas prolongeable par continuité en 0), donc $h(x)$ existe si $0 \notin [x, x^2]$, ce qui est le cas si $x > 0$. Autrement dit, $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}^{+*}$. Comme d'habitude, $h(x) = F(x^2) - F(x)$, donc $h'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \frac{2xe^{x^2}}{x^2} - \frac{e^x}{x} = \frac{2e^{x^2} - e^x}{x}$. Cette dérivée est du signe de $2e^{x^2} - e^x = e^x(2e^{x^2-x} - 1)$. Elle est positive lorsque $x^2 - x \geq -\ln(2)$, or $x^2 - x$ admet son minimum en $\frac{1}{2}$, de valeur $-\frac{1}{4} \geq -\ln(2)$. La fonction h est donc croissante sur \mathbb{R}^{+*} . On peut ajouter facilement que $h(x) \geq 0$ si $x \geq 1$, mais $h(x) \leq 0$ sur $]0, 1]$ puisque les bornes de l'intégrale sont alors « dans le mauvais sens ». Les limites sont assez faciles à calculer : $\forall x \geq 1, h(x) \geq \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t^2} dt = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^x$, ce qui suffit à prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. Par ailleurs, $\forall x \in]0, 1], h(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{t} dt$ (n'oubliez pas que les bornes sont dans le mauvais sens), donc $h(x) \leq \ln(x^2) - \ln(x) = \ln(x)$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$. Pas de tableau de variations cette fois-ci (il n'y aurait pas grand chose à mettre dedans), on se contentera d'une dernière allure de courbe :



Exercice 7 (***)

1. (a) Prenons deux réels x et y dans \mathbb{R}_+^* tels que $x < y$. On a alors $e^{-tx} > e^{-ty}$ pour tout $t \in [0; 1]$. De même $t^k e^{-tx} > t^k e^{-ty}$ et on peut intégrer cette inégalité, ce qui donne exactement $f_k(x) > f_k(y)$, donc f_k est bien décroissante.

(b) On a $f_k(0) = \int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$. La suite $(f_k(0))$ est donc décroissante et tend vers 0. Or, f_k étant positive et décroissante sur \mathbb{R}^+ , on a $\forall x > 0, 0 \leq f_k(x) \leq \frac{1}{k+1}$, ce qui suffit à assurer via le théorème des gendarmes que $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
2. (a) Il s'agit de faire une IPP en posant $u(t) = t^{k+1}$ et $v'(t) = e^{-tx}$, donc $u'(t) = (k+1)t^k$ et $v(t) = -\frac{e^{-tx}}{x}$ (faites bien gaffe que la variable ici est t et x est donc une constante). On obtient $f_{k+1}(x) = \left[-t^{k+1} \frac{e^{-tx}}{x} \right]_0^1 + (k+1) \int_0^1 t^k \frac{e^{-tx}}{x} dx = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{k+1}{x} f_k(x)$.

(b) On a $f_0(x) = \int_0^1 e^{-tx} dt = \left[-\frac{e^{-tx}}{x} \right]_0^1 = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1 - e^{-x}}{x}$. On peut utiliser la question précédente pour calculer les fonctions suivantes : $f_1(x) = \frac{1}{x} f_0(x) - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x^2} (1 - e^{-x} - x e^{-x})$, puis $f_2(x) = \frac{2}{x} f_1(x) - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x^3} (2 - 2e^{-x} - 2x e^{-x} - x^2 e^{-x})$.

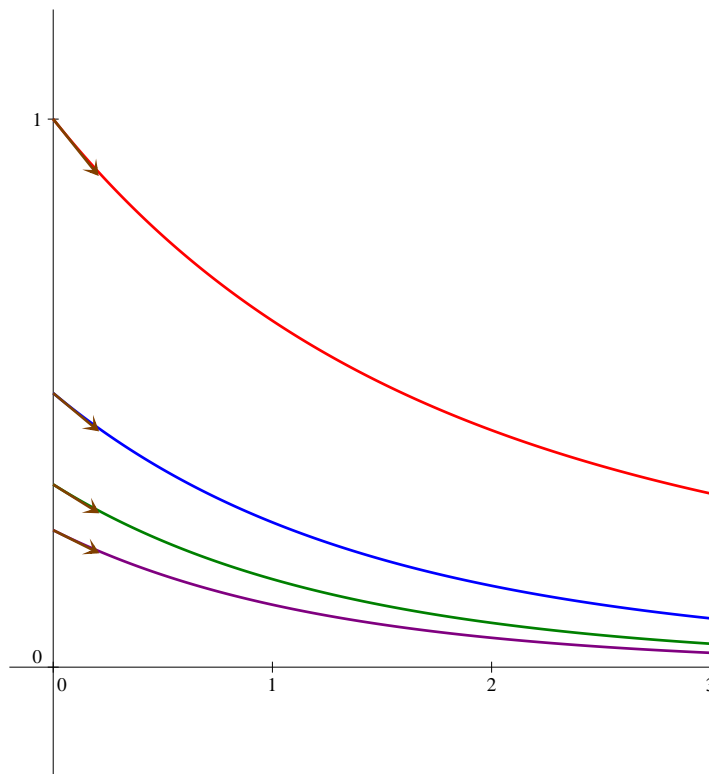
(c) Il suffit de reprendre l'expression trouvée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-x} = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f_0(x) = 1$.
3. (a) Le changement de variable est $u = tx$, qui donne $du = x dt$, et change les bornes de l'intégrale en 0 et x , ce qui donne donc $f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt = \int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^k e^{-u} \frac{du}{x} = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u} du$.

(b) On vient d'écrire $f_k(x)$ sous la forme d'un produit $g(x)h(x)$, où $g(x) = \frac{1}{x^{k+1}}$, et donc $g'(x) = -\frac{k+1}{x^{k+2}}$, et $h(x) = \int_0^x u^k e^{-u} du$, donc $h'(x) = x^k e^{-x}$. On en déduit que $f'_k(x) = -\frac{k+1}{x^{k+2}}h(x) + \frac{1}{x^{k+1}}x^k e^{-x} = -\frac{k+1}{x}f_k(x) + \frac{e^{-x}}{x}$. On vient donc de montrer, en reprenant le résultat de la question 2.a, que $f'_k = -f_{k+1}$.

(c) On étudie la fonction $y \mapsto 1 - e^{-y} - y$ sur \mathbb{R}^+ . sa dérivée vaut $e^{-y} - 1$, qui est négative sur l'intervalle d'étude. Or, pour $y = 0$, la fonction est nulle. Elle est donc bien négative sur \mathbb{R}^+ .

On a donc $f_k(x) - f_k(0) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt - \int_0^1 t^k dt = \int_0^1 t^k (e^{-tx} - 1) dt \geq \int_0^1 t^{k+1} x dt = \frac{x}{k+2}$. Quand x tend vers 0, ceci tend vers 0. Comme par ailleurs $f_k(x) - f_k(0)$ est négatif puisque f_k est décroissante, la fonction f_k est bien continue en 0.

Pour la dérivée, on utilise ce bon vieux théorème du prolongement de la dérivée! La fonction f_k est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , de dérivée $f'_k = -f_{k+1}$. On vient de voir que f_{k+1} était continue en 0, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f_{k+1}(x) = f_{k+1}(0) = \frac{1}{k+2}$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} f'_k(x) = -\frac{1}{k+2}$ puis que f_k est dérivable en 0, de dérivée $f'_k(0) = -\frac{1}{k+2}$. Les courbes des fonctions f_k sont assez décevantes, mais voici l'allure des quatre premières (f_0 à f_3 , de haut en bas), les valeurs et tangentes en 0 correspondant évidemment aux valeurs calculées) :



Exercice 8 (**)

- Le but est donc de faire apparaître une somme de Riemann, ce qui consiste en gros à sortir un $\frac{1}{n}$ de la somme et à exprimer ce qui reste dans la somme en fonction de $\frac{k}{n}$ uniquement :

$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2 + k^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2(1 + (\frac{k}{n})^2)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\frac{k}{n}}{1 + (\frac{k}{n})^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.
Le théorème de convergence des sommes de Riemann permet alors d'affirmer que (u_n) converge et que sa limite vaut $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$.

• Même méthode : $v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2k}{n}}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$, donc (v_n) converge vers $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}} dx = [\sqrt{1+2x}]_0^1 = \sqrt{3} - 1$.

• Pour w_n , c'est un peu plus subtil, il vaut mieux étudier $\ln(w_n)$ et surtout se rendre compte que $\ln(n!) = \ln(1 \times 2 \times \dots \times n) = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n$. On a alors :

$$\ln w_n = \frac{1}{n}(\ln((2n)!) - n \ln n - \ln(n!)) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{k=2n} \ln k - n \ln n - \sum_{k=1}^{k=n} \ln k \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{k=2n} (\ln k - \ln n)$$

$$\ln w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{k=2n} \ln \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \ln \frac{n+k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

donc $(\ln w_n)$ converge vers $\int_0^1 \ln(1+x) dx = \int_1^2 \ln u du = [x \ln x - x]_1^2 = 2 \ln 2 - 1$, et (w_n) converge vers $e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}$.

Exercice 9 (****)

- En n'oubliant pas l'hypothèse $\pi = \frac{p}{q}$, $P_n(X - \pi) = \frac{1}{n!} \left(\frac{p}{q} - X\right)^n (p - p + qX)^n = \frac{1}{n!} \frac{p - qX}{q}^n \times q^n X^n = P_n(X)$.
- Si $\pi = \frac{p}{q}$, $p - qt$ est positif sur $[0, \pi]$, donc l'intégrale est celle d'une fonction positive, elle est positive.
- Prouvons-le pour 0 : comme il est racine de multiplicité n de P_n , il annule déjà toutes les dérivées k -èmes lorsque $k < n$. Supposons désormais $k > n$, en appliquant la formule de Leibniz au produit $X^n(p - qX)^n$, la seule dérivée de X^n ne s'annulant pas en 0 est la dérivée n -ème, qui vaut $n!$, donc $P_n^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} \binom{n}{k} n! (p - qX)^{n(k-n)}(0)$. Les $n!$ se simplifient, le coefficient binomial est un entier, il suffit de prouver que la dérivée restante est aussi entière. Elle sera nulle si $k - n > n$, soit $k < 2n$, sinon $((p - qX)^n)^{(k-n)} = n(n-1) \dots (2n-k+1)(p - qX)^{2n-k}$, qui prend pour valeur en 0 le nombre $\frac{n!}{(2n-k)!} p^{2n-k}$, qui est certainement un entier. On a bien prouvé que $P_n^{(k)}(0)$ était toujours un entier. Comme $P_n(\pi - X) = P_n(X)$, $P_n^{(k)}(\pi) = (-1)^k P_n^{(k)}(0)$ est également un entier.
- Pour $n = 0$, $I_0 = \int_0^\pi \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^\pi = 2 \in \mathbb{N}$. Prenons maintenant un entier supérieur ou égal à 1, et effectuons deux intégrations par partie successives (en dérivant P_n à chaque fois), en exploitant le fait que P_n s'annule en 0 et en π (c'est le cas de tous les polynômes P_n à partir de $n = 1$) et, comme on vient de le voir, que les dérivés P_n' prennent des valeurs entières en 0 et en π . On calcule donc $I_n = [-P_n(t) \cos(t)]_0^\pi + \int_0^\pi P_n'(t) \cos(t) dt = \int_0^\pi O_n'(t) \cos(t) dt$ (le crochet s'annule) $= [P_n'(t) \sin(t)]_0^\pi - \int_0^\pi P_n''(t) \sin(t) dt = - \int_0^\pi P_n''(t) \sin(t) dt$. Bon, ben il ne reste plus qu'à recommencer, en faisant attention au fait que les crochets ne vont pas continuer à tous s'annuler : à l'étape suivante $P_n''(t) \cos(t)$ ne s'annule plus en 0 et en π . Par contre ce qui est certain, c'est qu'il prend une valeur entière en 0 et en π , donc on peut écrire

$I_n = a_3 - \int_0^\pi P^{(3)}(t) \cos(t) dt = a_3 + \int_0^\pi P^{(4)}(t) \sin(t) dt$, avec $a_3 \in \mathbb{Z}$. Et on continue. À chaque étape, le premier crochet donnera un nombre entier, et le second s'annulera, pour donner $I_n = a_{2k-1} + (-1)^k \int_0^\pi P^{(2k)}(t) \sin(t) dt$, avec $a_{2k-1} \in \mathbb{Z}$. Pour être rigoureux, ça se démontre bien sûr par récurrence : on a vu plus haut que c'était vrai pour $k = 1$ et $k = 2$ et en le supposant au rang k , avec deux IPP de plus, $I_n = a_{2k-1} + \int_0^\pi P^{(2k)}(t) \sin(t) dt = a_{2k-1} + [(-1)^{k+1} P^{(2k)}(t) \cos(t)] + (-1)^k \int_0^\pi P^{(2k+1)}(t) \cos(t) dt = a_{2k+1} + [(-1)^k P^{(2k+1)}(t) \sin(t)]_0^\pi + (-1)^{k+1} \int_0^\pi P^{(2k+2)}(t) \sin(t) dt$, où a_{2k+1} est égal à a_{2k-1} plus la valeur du crochet avec le cosinus, ce qui donne bien à nouveau un nombre entier. Par principe de récurrence, la formule est vraie pour tout entier k , et en particulier pour $k = n$, valeur pour laquelle $\int_0^\pi P^{(2k)}(t) \sin(t) dt = 0$, puisque $P^{(2n)} = 0$. Il ne reste plus alors que $I_n = a_{2n-2} \in \mathbb{Z}$. Comme par ailleurs $I_n \geq 0$, $I_n \in \mathbb{N}$.

5. La fonction $x \mapsto x(p - qx)$ étant continue sur $[0, \pi]$, elle y atteint un maximum M (qu'on peut d'ailleurs calculer explicitement si on le souhaite), donc $P_n(t) \leq \frac{1}{n!} M^n$ sur $[0, \pi]$, et $I_n \leq \int_0^\pi \frac{M^n}{n!} \sin(t) dt = \frac{2M^n}{n!}$, qui a une limite nulle quand n tend vers $+\infty$. Puisque la suite est constituée de nombres entiers, elle est forcément nulle à partir d'un certain rang n_0 (par application de la définition de la limite avec par exemple $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on doit avoir $-\frac{1}{2} \leq I_n \leq \frac{1}{2}$ à partir d'un certain rang, donc $I_n = 0$). Mais comme on a vu que la fonction sous l'intégrale était toujours positive sur $[0, \pi]$, avoir une intégrale nulle signifie que $P_n(t) \sin(t)$ vaut toujours 0 entre 0 et π . En particulier, le polynôme P_n doit s'annuler une grosse infinité de fois (puisque \sin ne s'annule qu'une seule fois sur l'intervalle), ce qui implique que P_n est le polynôme nul. Voilà une grosse absurdité, P_n n'est manifestement pas égal à 0, donc notre hypothèse de départ est fautive et π ne peut pas être rationnel.

Exercice 10 (***)

- Allons-y : $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
- Il suffit de penser à effectuer le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ (donc $du = -dt$), qui se contente d'échanger les bornes de l'intégrale et surtout de transformer le \sin en $\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos(u)$. On obtient alors immédiatement $I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\cos^n(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u) du$.
- Il faut penser pour l'IPP à poser $u(t) = \sin^{n+1}(t)$ et $v'(t) = \sin(t)$, donc $u'(t) = (n+1) \cos(t) \sin^n(t)$ et $v(t) = -\cos(t)$, pour obtenir $I_n = [-\cos(t) \sin^n(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \sin^n(t) dt = 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t)) \sin^n(t) dt = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) - \sin^{n+2}(t) dt = (n+1)(I_n - I_{n+2})$.
On en déduit que $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, soit $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
- D'après la question précédente, $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)} I_{2p-4} = \dots$

$$= \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2} I_0 = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\dots 2 \times 1}{(2p^2)(2p-2)^2 \dots 2^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p^2 (p-1)!} \times \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)! \pi}{2^{2p+1} (p!)^2}. \text{ De même, } I_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 3} \times I_1 = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

5. Puisque le sinus est positif entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (et évidemment plus petit que 1), on a $\sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$ sur cet intervalle, donc par intégration $I_{n+1} \leq I_n$. La suite est donc décroissante. Elle est positive donc minorée, donc convergente.

6. Il suffit d'appliquer la décroissance de la suite (I_n) pour obtenir $\frac{I_n}{I_n} \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}$, soit $1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n+2}$ en reprenant le résultat de la question 3. Puisque le membre de droite a pour limite 1, une simple application du théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$.

7. Plusieurs possibilités ici. Soit on reprend les formules obtenues à la question 4 et on constate de grosses simplifications : $I_{2n+1} I_{2n} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \times \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1} (n!)^2} = \frac{\pi}{2 \times (2n+1)}$, et de même $I_{2n} I_{2n-1} = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1} (n!)^2} \times \frac{2^{2n-2} (n-1)!^2}{(2n-1)!} = \frac{2n\pi}{2^3 n^2} = \frac{\pi}{2 \times 2n}$. Dans les deux cas, que n soit pair ou impair, $I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2(n+1)}$.

Autre possibilité, constater que $(n+2)I_{n+2} I_{n+1} = (n+1)I_{n+1} I_n$ en reprenant la relation de la question 3, donc la suite $((n+1)I_{n+1} I_n)$ est constante égale à son premier terme $I_1 I_0 = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 11 (***)

1. La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ étant paire, $\int_{-x}^0 e^{t^2} dt = \int_0^x e^{t^2} dt$, et $f(-x) = -f(x)$ (attention à l'inversion des bornes dans l'intégrale!), le facteur e^{-x^2} restant lui inchangé.

2. On peut très simplement dériver f comme un produit, la dérivée de $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ étant égale à e^{x^2} . On obtient alors $f'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + e^{-x^2} e^{x^2} = -2xf(x) + 1$. La fonction f est donc solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.

3. C'est loin d'être évident (bien sûr, d'après la question précédente, cela revient à montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$, mais ce n'est pas plus facile). On commence par effectuer une IPP sur $\int_1^x e^{t^2} dt$

(pour faire apparaître le terme prépondérant dans $f(x)$, méthode classique même si c'est assez brutal ici, et qu'on est obligés de partir de 1 et pas de 0 vu le calcul qu'on va faire ensuite) en posant $u'(t) = 2te^{t^2}$, donc $u(t) = e^{t^2}$, et $v(t) = \frac{1}{2t}$, donc $v'(t) = -\frac{1}{2t^2}$, pour obtenir

$$\int_1^x e^{t^2} dt = \left[\frac{e^{t^2}}{2t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt. \text{ On en déduit que } 1 - 2xf(x) =$$

$$1 - 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{t^2} dt - 2xe^{-x^2} \int_1^x e^{t^2} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{t^2} dt + exe^{-x^2} + xe^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt.$$

Le premier terme a une limite nulle par croissance comparée (l'intégrale de 0 à 1 étant une constante), le deuxième terme tend également vers 0 (toujours de la croissance comparée).

Reste le troisième. Le dernier morceau (avec l'intégrale de 1 à x), pose encore des problèmes : on a bien envie de majorer la fonction dans l'intégrale pour obtenir quelque chose de calculable qui tend vers 0, mais en majorant e^{t^2} par e^{x^2} sur $[1, x]$, par exemple, la majoration obtenue n'est pas suffisante (on majore par une constante). Il vaut mieux couper en deux sous la forme

$$xe^{-x^2} \int_1^{x-1} \frac{e^{t^2}}{t^2} dt + xe^{-x^2} \int_{x-1}^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt. \text{ Dans le premier morceau (en supposant } x \geq 2), \text{ on}$$

majore e^{t^2} par $e^{(x-1)^2}$ et $\frac{1}{t^2}$ par 1 pour trouver $xe^{-x^2} \int_1^{x-1} \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \leq xe^{-x^2} \times e^{(x-1)^2} \int_1^{x-1} 1 dt = x(x-2)e^{-2x+1}$. Cette quantité a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$ (encore de la croissance comparée). Dans le dernier morceau, on se contente de majorer le numérateur, en gardant le dénominateur intact : $xe^{-x^2} \int_{x-1}^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \leq x \int_{x-1}^x \frac{1}{t^2} dt = x \left[-\frac{1}{t} \right]_{x-1}^x = x \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x-1}$. Ouf, ça tend encore vers 0, et achève notre démonstration : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xf(x) = 1!$

4. Au vu de la relation trouvée à la deuxième question, $g(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}(1-2xf(x)) = \frac{e^{x^2}}{2x} - \int_0^x e^{t^2} dt$.

On dérive pour obtenir $g'(x) = \frac{4x^2 e^{x^2} - 2e^{x^2}}{4x^2} - e^{x^2} = -\frac{e^{x^2}}{2x^2} < 0$, donc la fonction g est effectivement décroissante. Étant continue, elle est nécessairement bijective de \mathbb{R}^{+*} vers un intervalle inconnu. Comme $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} 1-2xf(x) = 1$, et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$. Inutile de chercher la limite de g en $-\infty$, puisque l'énoncé prétend que la fonction s'annule entre 0 et 1, vérifier que $g(1) < 0$ suffit, ce qui découle du fait que $1 - 2f(1) < 0$. Or, $1 - 2f(1) = 1 - \frac{2}{e} \int_0^1 e^{t^2} dt$.

Il faudrait donc que $\int_0^1 e^{t^2} dt > \frac{e}{2}$. Malheureusement, cette intégrale n'est pas calculable de façon exacte. On en connaît toutefois des valeurs approchées précises (par exemple quand on a des tables de loi normale sous la main!), et l'inégalité est effectivement vérifiée (si vous avez beaucoup de temps à perdre, effectuez la méthode des rectangles pour le vérifier).

5. D'après la question précédente, g , et donc f' , est positive sur $[0, x_0[$ et négative ensuite. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0, x_0[$, et décroissante ensuite. On sait évidemment que $f(0) = 0$, et les limites de f aux infinis sont nulles puisque $2xf(x)$ tend elle-même vers 0. En utilisant de plus l'imparité de la fonction, on peut dresser le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-x_0$	0	x_0	$+\infty$
f	0	$-f(x_0)$	0	$f(x_0)$	0

6. Inutile de chercher à calculer la valeur des extrema, mais on sait déjà que $f(1) \geq \frac{1}{2}$, ce qui donne une borne inférieure (vu le peu d'écart entre les deux valeurs, on peut se douter que x_0 est proche de 1 et le maximum proche également de $\frac{1}{2}$). La courbe représentative de f ressemble en fait à ceci :

