Feuille d'exercices n°13 : Intégration

PTSI B Lycée Eiffel

5 mars 2015

Exercice 1 (**)

On définit, pour tout entier n, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^e x^2(\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_1.
2. Montrer que sur $[1; e]$, on a $(\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$, et en déduire le sens de variation de I_n.
3. Montrer que (I_n) est convergente.
4. Montrer que sur $[1; e]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant \dfrac{x}{e}$. En déduire la limite de I_n.
5. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n+1}{3} I_n$. En déduire la limite de nI_n.

Exercice 2 (**)

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\, dt$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ln 2$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln 2 - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln 2 - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
7. Donner la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 (*)

On considère la suite définie par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Déterminer la limite de la suite (I_n).
3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. On note désormais $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, exprimer S_n en fonction de I_n.
5. Déduire des questions précédentes la convergence et la limite de la suite (S_n).

Exercice 4 (***)

Soit f une fonction telle que $\forall k \leqslant n$, $\displaystyle\int_0^1 t^k f(t)\ dt = 0$, montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[0;1]$.

Exercice 5 (*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. Montrer que f est dérivable et déterminer sa dérivée. En déduire le tableau de variations de f.
2. On pose désormais $g(x) = f(x) - \ln x$. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire son signe.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 6 (***)

Étudier les fonctions suivantes :

- $f(x) = \displaystyle\int_x^{4x} e^{-t^2}\ dt$
- $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\text{ch}(t)}{t^2}\ dt$
- $h(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\ dt$

Exercice 7 (***)

Pour tout entier naturel k on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}^+$ par la relation

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt$$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Etudier la suite $(f_k(0))_{k \geqslant 0}$. En déduire, pour tout réel positif x, la limite de la suite $(f_k(x))_{k \geqslant 0}$.
2. (a) Soit $x > 0$. Etablir que $f_{k+1}(x) = \dfrac{k+1}{x} f_k(x) - \dfrac{e^{-x}}{x}$ pour tout $k \geqslant 0$.
   (b) Expliciter les fonctions f_0, f_1 et f_2.
   (c) Montrer que, $\lim\limits_{x \to +\infty} x f_0(x) = 1/x$.
3. (a) En effectuant un changement de variable, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0$, $f_k(x) = \dfrac{1}{x^{k+1}} \displaystyle\int_0^x u^k e^{-u}\ du$.
   En déduire que f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
   (b) Trouver une relation simple entre f_k' et f_{k+1}.
   (c) Montrer que pour tout réel $\forall y \geqslant 0$, $1 - e^{-y} \leqslant y$. En déduire que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est continue en 0. Est-elle dérivable à droite en ce point ?

Exercice 8 (**)

Déterminer les limites de chacune des suites suivantes en utilisant des sommes de Riemann.

- $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2}$
- $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$
- $w_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 9 (****)

Le but de cet exercice est de montrer par l'absurde que π est un nombre irrationnel. Supposons donc que $\pi = \dfrac{p}{q}$ (n'oubliez pas cette hypothèse dans la suite de l'exercice), et posons $P_n(X) = \dfrac{1}{n!}X^n(p-qX)^n$, et $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} P_n(t)\sin(t)\ dt$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(\pi - X) = P_n(X)$.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$, et $P_n^{(n)}(\pi) \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \in \mathbb{N}$ (on pourra procéder à des intégrations par parties successives).
5. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$. En déduire que l'hypothèse initiale est absurde.

Exercice 10 (***)

Pour tout entier n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ dt$.
3. À l'aide d'une intégration par partie, déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n.
4. En déduire les valeurs de I_{2p} et I_{2p+1} (on les exprimera à l'aide de factorielles).
5. Déterminer la monotonie de la suite (I_n) puis prouver sa convergence.
6. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$.
7. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 11 (***)

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\ dt$.

1. Déterminer la parité de la fonction f.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre à préciser (mais qu'on ne demande pas de résoudre).
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2xf(x) = 1$.
4. On pose $g(x) = \dfrac{e^{x^2}}{2x}f'(x)$. Montrer que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et qu'elle s'annule en un unique x_0 compris strictement entre 0 et 1.
5. En déduire le tableau de variations de f (on ne cherchera pas à calculer x_0.
6. Tracer une allure plausible de la courbe représentative de f.