

Feuille d'exercices n°14 : Espaces vectoriels

PTSI B Lycée Eiffel

11 mars 2015

Exercice 1 (*)

On se place dans l'ensemble E des fonctions \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (il s'agit bien d'un espace vectoriel). Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E ?

- fonctions paires
- fonctions admettant un minimum global
- fonctions s'annulant une infinité de fois sur \mathbb{R}
- fonctions vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x^2)$
- fonctions admettant une tangente horizontale en $x = 5$
- fonctions vérifiant $f''(x) = 3f'(x) - 2f(x)$
- fonctions admettant en $+\infty$ une asymptote (horizontale ou oblique) ou une branche parabolique (de direction (Ox) ou (Oy))

Exercice 2 (*)

Parmi tous les sous-ensembles suivants de $E = \mathbb{R}_3[X]$, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels, donner leur dimension ainsi qu'une base pour chacun d'eux.

1. $\{P \in E \mid P(2) = 0\}$
2. $\{P \in E \mid P(0) = 2\}$
3. $\{P \in E \mid P + P'' = 0\}$
4. $\{P \in E \mid P \in \mathbb{R}_1[X]\}$
5. $\{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$
6. $\{P \in E \mid \int_0^2 P(x) dx = 0\}$
7. $\{P \in E \mid \int_0^2 P(x) dx = 0 \text{ et } P(1) = 0\}$
8. $\{P \in E \mid P(1) = P'(1) = 0\}$
9. $\{P \in E \mid P(X+1) = 2P(X)\}$

Exercice 3 (**)

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille \mathcal{F} est une base de E , et déterminer si possible les coordonnées de x dans \mathcal{F} .

1. $E = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{F} = ((-1, 1, 1); (1, -1, 1); (1, 1, -1))$ et $x = (2, 3, 4)$.
2. $E = \mathbb{R}_3[X]$; $\mathcal{F} = (1; X; X(X-1); X(X-1)(X-2))$ et $x = X^3$.
3. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} \right)$ et $x = I_4$.
4. $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \geq 4, u_n = 0\}$; $x = (-2, 3, 4, 1, 0, 0, \dots)$ (vous avez le choix pour \mathcal{F} !).

Exercice 4 (*)

On considère dans \mathbb{R}^3 les deux sous-ensembles $F = \{(x, y, z) \mid 2x + y - 3z = 0\}$ et $G = \{(2a + b, a - b, 3a - b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer qu'il s'agit de deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 , et déterminer leur intersection $F \cap G$.

Exercice 5 (**)

Dans un espace vectoriel E , on considère trois sous-espaces vectoriels A , B et C .

1. Montrer que $A \cap (B + C) \supset (A \cap B) + (A \cap C)$. L'égalité est-elle nécessairement vérifiée ?
2. A-t-on toujours $A + (B \cap C) = (A + B) \cap (A + C)$?
3. Montrer que $A + (B \cap (A + C)) = (A + B) \cap (A + C)$.

Exercice 6 (*)

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble des matrices M s'écrivant

sous la forme $M = aI + bJ + cK + dL$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}^4$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel, et que (I, J, K, L) en forme une base.
2. Montrer, en les calculant explicitement, que J^2 , K^2 , L^2 , J^3 et L^3 appartiennent à E .
3. En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK , KJ , KL , LK , JL et LJ appartiennent aussi à E .
4. Établir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E .

Exercice 7 (**)

Dans chacun des cas suivants, montrer que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , et qu'ils sont supplémentaires.

- $E = \mathbb{R}^2$; $F = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \mid x - y = 0\}$.
- $E = \mathbb{R}^3$; $F = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((3, 2, 1))$.
- $E = \mathbb{R}_2[X]$; $F = \text{Vect}(X, X^2)$ et $G = \{P \mid P' = 0\}$.
- $E = \mathbb{R}_6[X]$; $F = \{P \in E \mid P \text{ est une fonction paire}\}$ et $G = \{P \in E \mid P \text{ est une fonction impaire}\}$.
- $E = \mathcal{C}_0([-1; 1], \mathbb{R})$; $F = \{f \in E \mid \int_{-1}^1 f(t) dt = 0\}$ et $G = \{\text{fonctions constantes}\}$.
- $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0\}$; $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + u_n = 0\}$ et $G = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0\}$.

Exercice 8 (**)

Dans \mathbb{R}^4 , on considère la famille $\mathcal{F} = ((1, 2, 0, 1); (2, 1, 3, -1); (4, 5, 3, 1))$.

1. Déterminer si la famille \mathcal{F} est libre, et donner une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$.
2. Décrire \mathcal{F} comme ensemble des solutions d'un système d'équations à déterminer.

- On note G l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} 2x + y + z + t = 0 \\ x + z - t = 0 \end{cases}$. Déterminer une base de G , ainsi que sa dimension.
- Montrer que $\mathbb{R}^4 = \text{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G$. Déterminer la décomposition dans $\text{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G$ du vecteur $(6, 10, 8, 2)$.

Exercice 9 (*)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

- Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont on précisera une base et la dimension.
- Même question pour $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

Exercice 10 (***)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace E de dimension finie, qui vérifient $\dim(F) = \dim(G)$.

- Montrer que $F \cap G$ admet un supplémentaire F' dans F et un supplémentaire G' dans G qui sont de même dimension.
- Montrer que F' et G' ont une intersection réduite au vecteur nul.
- En considérant des bases de F' et G' , construire un supplémentaire commun à F et G dans $F + G$.
- Montrer qu'il existe un supplémentaire commun à F et G dans E .

Exercice 11 (***)

On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note \mathcal{S} le sous-espace constitué des matrices symétriques et \mathcal{A} celui constitué des matrices antisymétriques.

- Donner la dimension de \mathcal{S} et celle de \mathcal{A} , ainsi qu'une base de chacun de ces sous-espaces.
- On note \mathcal{T} l'ensemble des matrices de trace nulle. Montrer que \mathcal{T} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donner sa dimension, ainsi qu'une base.
- On note désormais \mathcal{M} l'ensemble des matrices dont la somme des coefficients sur chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est la même. Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Déterminer la dimension et une base de \mathcal{M} .
- Déterminer la dimension de $\mathcal{M} \cap \mathcal{S}$, donner un exemple de matrice symétrique appartenant à \mathcal{M} , dont le coefficient sur la première ligne, première colonne vaut 1.
- Déterminer la dimension de $\mathcal{M} \cap \mathcal{A}$, donner un exemple de matrice antisymétrique appartenant à \mathcal{M} , dont le coefficient sur la première ligne, troisième colonne vaut 1.
- Montrer qu'il n'existe qu'une seule matrice dans \mathcal{M} dont la première ligne est constituée des nombres 1, 2 et 3 (dans cet ordre), et donner cette matrice.