Feuille d'exercices n°11 : corrigé

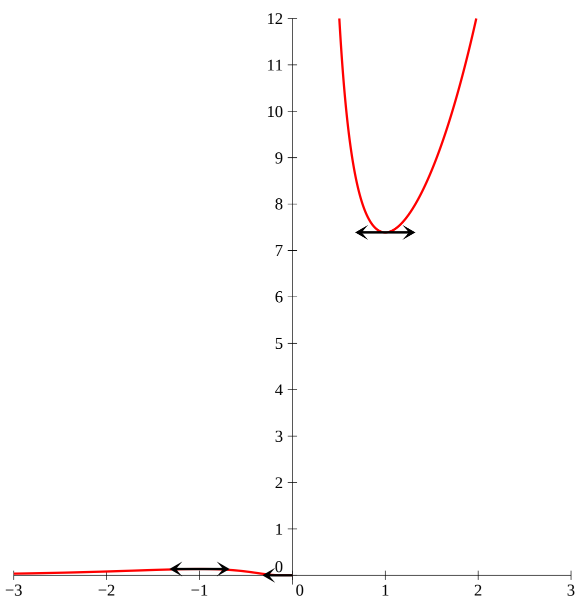
PTSI B Lycée Eiffel

27 janvier 2015

Exercice 1 (* à **)

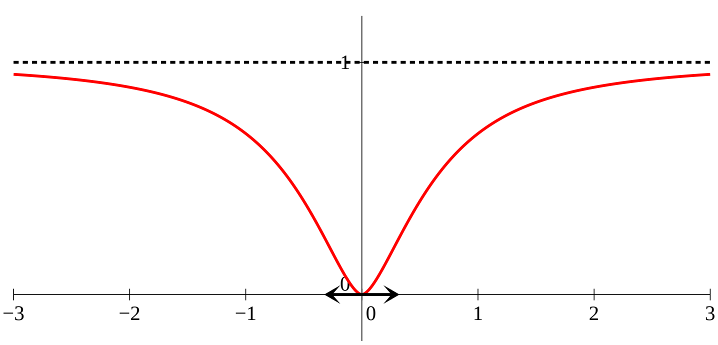
- La fonction f_1 est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} x+\dfrac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f_1(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to 0^-} x+\dfrac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f_1(x) = 0$. On peut prolonger la fonction f_1 seulement par continuité à gauche en 0, en posant $f_1(0) = 0$. Dérivons désormais : $f_1'(x) = \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}e^{x+\frac{1}{x}}$. Commençons par constater que $\lim\limits_{x\to 0^-} f_1'(x) = 0$ (par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = 0$, et il ne reste ensuite qu'un facteur $\dfrac{x-1}{x+1}e^x$ qui tend vers 1), donc d'après le théorème du prolongement de la dérivée, f_1 est dérivable à gauche en 0 et sa courbe représentative y admet une tangente horizontale. Les variations sont par ailleurs faciles à étudier, on peut calculer les valeurs des extrema locaux : $f_1(-1) = e^{-1-1} = \dfrac{1}{e^2}$, et $f_1(1) = e^2$. On peut dresser le tableau de variations suivant (les limites aux infinis ne posent aucun problème) :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f_1	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	0 | $+\infty$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$+\infty$

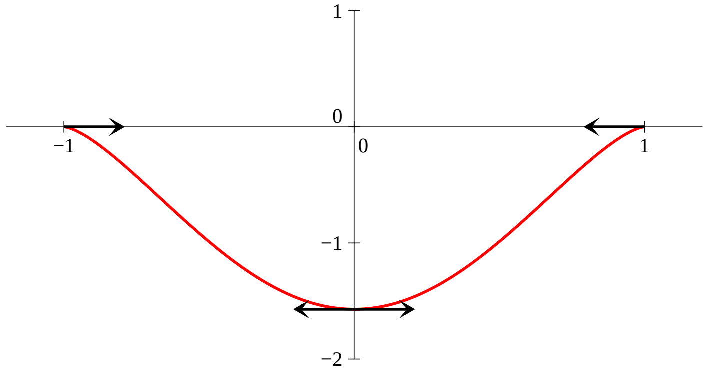


- La fonction f_2 est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (ce qui est dans le ln étant toujours strictement positif). Elle est de plus manifestement paire et accessoirement à valeurs positives. En posant $X = \dfrac{1}{x^2}$, qui a pour limite 0 quand x se rapproche des infinis, et en utilisant la limite classique $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{x} = 1$, on obtient que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$. En 0, écrivons plutôt que $f_2(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right) = x^2 \ln(x^2+1) - x^2 \ln(x^2)$ (expression qui est définie sur $\mathbb{R}^*$ comme $f(x)$). Le premier terme a pour limite 0, le deuxième aussi (par croissance comparée), donc on peut prolonger f_2 par continuité en 0 en posant $f_2(0) = 0$. Passons à la dérivée : $f_2'(x) = 2x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) + x^2 \times \dfrac{-2}{x^3} \times \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 2x\left(\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x^2+1}\right)$. Pas de problème pour la limite en 0, la même technique que tout à l'heure (pour le produit de $2x$ par le ln, l'autre morceau tendant facilement vers 0) permet de prouver que $\lim\limits_{x \to 0} f_2'(x) = 0$, donc par théorème du prolongement de la dérivée (je me dispenserai de le citer pour les fonctions suivantes), la fonction f_2 est dérivable en 0, et $f_2'(0) = 0$. Pour les variations, ce n'est pas si simple, sur $\mathbb{R}^+$, la dérivée est du signe de $g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x^2+1}$. La dérivée de cette fonction g vaut $g'(x) = -\dfrac{2}{x(1+x^2)} + \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x^2 - 2(1+x^2)}{x(1+x^2)^2} = \dfrac{-2}{x(1+x^2)^2}$. La fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, de limite nulle en $+\infty$, donc elle est positive sur $]0;+\infty[$. La fonction f_2 est donc croissante sur $[0;+\infty[$, et par parité, décroissante sur $]-\infty;0]$. Résumons nos différents calculs dans un tableau de variations :

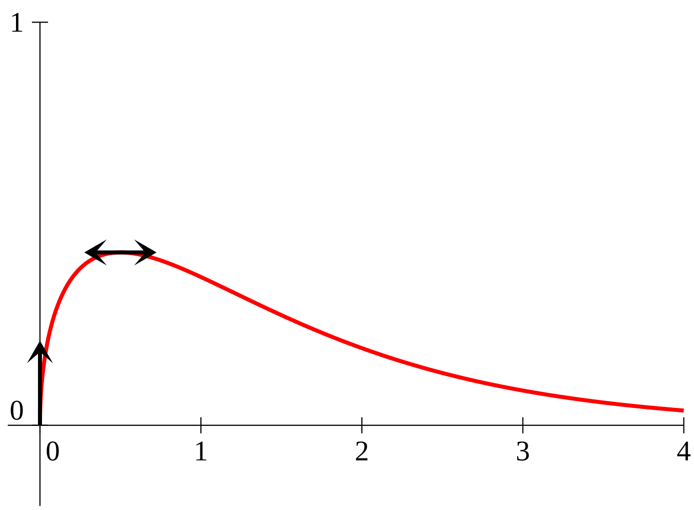
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_2	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1



- La fonction f_3 est définie sur $[-1;1]$ (puisqu'il faut avoir $-1 \leqslant x^2 \leqslant 1$ pour que l'arccos soit défini), mais a priori $\mathcal{C}^\infty$ seulement sur $]-1;1[$. La fonction est de plus paire. Pas de prolongement par continuité à étudier (ni de limites pour f_3, contentons-nous de signaler que $f_3(-1) = f_3(1) = 0$). Passons donc tout de suite au calcul de la dérivée : $f_3'(x) = 2x \arccos(x^2) + (x^2-1) \times \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}} = 2x\left(\arccos(x^2) + \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$. Cette dérivée est facilement positive sur $[0;1]$, et la fonction est dérivable en 1, avec $f_3'(1) = 2(\arccos(1) + \sqrt{0}) = 0$. La fonction admet par ailleurs un minimum en 0, de valeur $f_3(0) = -\arccos(0) = -\dfrac{\pi}{2}$. Une allure de la courbe :

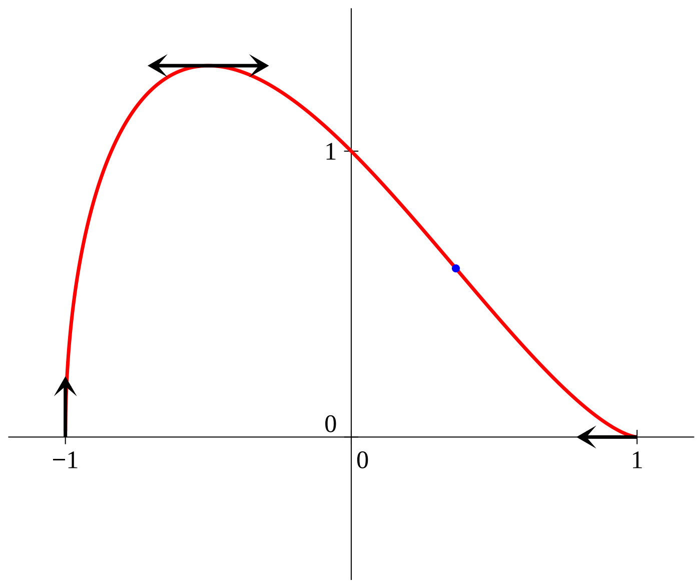


- La fonction f_4 est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$ (à cause de la racine carrée). Calculons la dérivée : $f_4'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)e^{-x} = \frac{1-2x}{2\sqrt{x}}e^{-x}$. En 0, cette dérivée a une limite infinie, la fonction f_4 n'est donc pas dérivable, mais la courbe admet en 0 une tangente verticale. La fonction est par ailleurs croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et décroissante ensuite, avec pour maximum $f_4\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$. Si on est courageux, on peut enchaîner sur le calcul de la dérivée seconde pour étudier la convexité (notion hors programme mais assez simple à appréhender) : $f_4''(x) = \left(-\frac{1}{4x\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)e^{-x} = \frac{4x^2-4x-1}{4x\sqrt{x}}e^{-x}$. Cette dérivée seconde est du signe de $4x^2-4x-1$, dont le discriminant vaut $\Delta = 16+16 = 32$, et qui admet donc deux racines $x_1 = \frac{4+\sqrt{32}}{8} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, et $x_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} < 0$. La courbe changera donc de concavité au point d'abscisse $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ (et d'ordonnée $\sqrt{x_1}e^{-x_1}$, que l'on ne cherchera pas à expliciter ; je ne parle même pas de la tangente dont la pente sera horrible). Ce point n'est pas indiqué sur la courbe qui suit (par souci de lisibilité) :



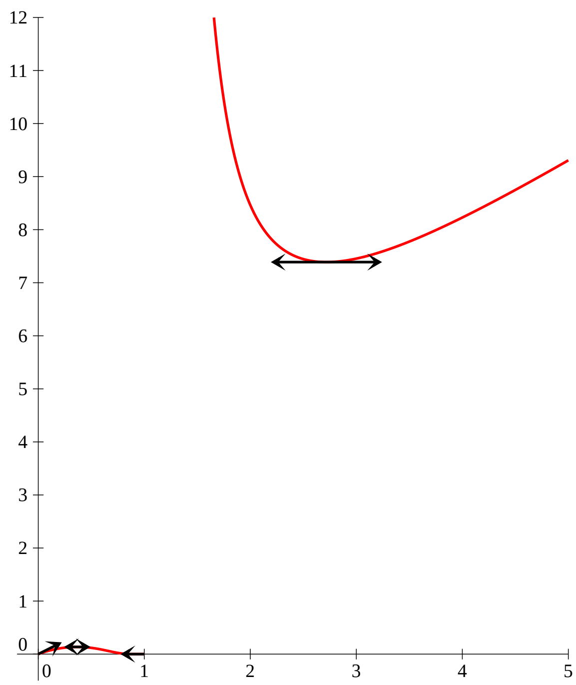
- La fonction f_5 est définie et continue sur $[-1;1]$, mais a priori $\mathcal{C}^\infty$ seulement sur $]-1;1[$. Pour changer, dérivons : $f_5'(x) = -\sqrt{1-x^2} + (1-x) \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(1-x^2)-x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = -(2x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. En -1, cette expression a une limite infinie, il y aura une tangente verticale ; par contre en 1, la limite est nulle, la fonction est donc

dérivable en 1 et $f_5'(x) = 0$. Par ailleurs, la fonction est croissante sur $\left]0; \frac{1}{2}\right]$, et décroissante ensuite. Elle admet pour maximum $f_5\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. On peut enchaîner sur la dérivée seconde : $f_5''(x) = \dfrac{-2\sqrt{1-x^2} + \frac{(2x+1)\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}} + \frac{(2x+1)\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}$
$= \dfrac{-4(1-x^2) + (2x+1)(1+x) + (2x+1)(1-x)}{2(1+x)\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2x^2+2x-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$, qui est du signe de $2x^2 + 2x - 1$, dont le discriminant vaut $\Delta = 4 + 8 = 12$, et s'annule donc en $x_1 = \dfrac{-2+\sqrt{12}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, et $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, qui n'appartient pas à l'intervalle $[-1; 1]$. Il y donc un seul point de changement de concavité pour la courbe, qui est indiqué en bleu (mais sans tracé de la tangente, même si ici le calcul est faisable) sur la courbe suivante :

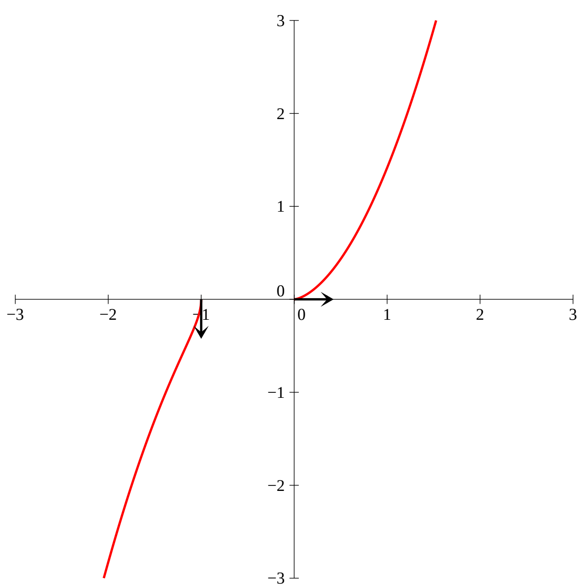


- La fonction f_6 est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{\ln(x)}} = 1$, on peut prolonger f_6 par continuité en 0 en posant $f_6(0) = 0$. En 1, on calcule sans difficulté $\lim\limits_{x\to 1^-} f_6(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f_6(x) = +\infty$. On peut donc prolonger par continuité à gauche en 1 en posant $f_6(1) = 0$, mais pas à droite. Passons à la dérivée : $f_6'(x) = \left(1 - \dfrac{x}{x\ln^2(x)}\right) e^{\frac{1}{\ln(x)}} = \dfrac{\ln^2(x) - 1}{\ln^2(x)} e^{\frac{1}{\ln(x)}}$. En 1, cette dérivée a la même limite que $-X^2 e^X$, où on a posé $X = \dfrac{1}{\ln(x)}$. Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} X = -\infty$, on en déduit par croissance comparée que $\lim\limits_{x\to 1^-} f_6'(x) = 0$. La fonction admet donc en 1 une demi-tangente horizontale. En 0, la dérivée a pour limite évidente 1 (on factorise le quotient par $\ln^2(x)$ si on y tient vraiment), donc f_6 est aussi dérivable en 0, et $f_6'(0) = 1$. Le signe de la dérivée est par ailleurs celui de $\ln^2(x) - 1 = (\ln(x) + 1)(\ln(x) - 1)$, qui s'annule en e et en $\frac{1}{e}$. On calcule $f_6(e) = e \times e^1 = e^2$, et $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \times e^{-1} = \frac{1}{e^2}$. On peut résumer toutes ces informations dans le tableau de variations suivant :

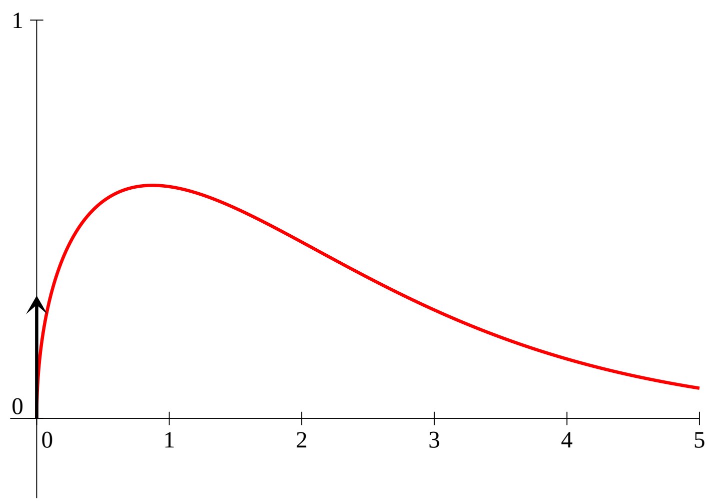
x	0		$\frac{1}{e}$		1		e		$+\infty$
f_6	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	0 | $+\infty$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$+\infty$



- La fonction f_7 est définie et continue sur $]-\infty,-1]\cup[0,+\infty[$ mais $\mathcal{C}^\infty$ seulement sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ a priori. On peut ici calculer directement $f_7'(x) = \sqrt{x+x^2} + \dfrac{x(1+2x)}{2\sqrt{x+x^2}} = \dfrac{2x+2x^2+x+2x^2}{2\sqrt{x+x^2}} = \dfrac{3x+4x^2}{2\sqrt{x+x^2}} = \dfrac{(3+4x)\sqrt{x}}{2\sqrt{1+x}}$ si $x \geqslant 0$. Sur l'autre intervalle, $f_7'(x) = \dfrac{(3+4x)\sqrt{-x}}{-2\sqrt{-1-x}}$. En tout cas, on a une limite infinie, donc une tangente verticale, en -1, et une limite nulle en 0, où la fonction est donc dérivable avec une tangente horizontale. La dérivée est par ailleurs positive sur chacun des deux intervalles où f_7 est définie. Une allure de courbe :

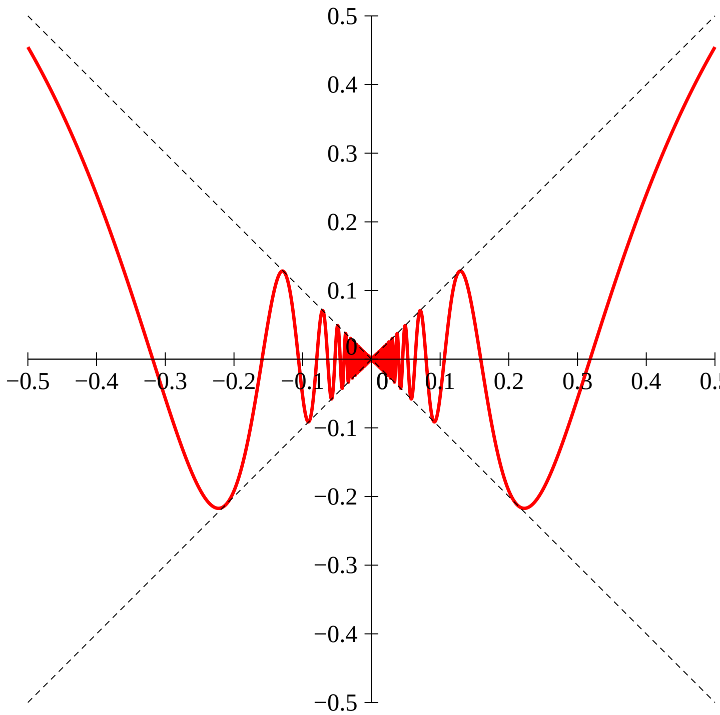


- La fonction f_8 est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, en utilisant le fait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ (limite classique), on obtient $\lim\limits_{x\to 0} f_8(x) = 0$, et on peut prolonger f_8 par continuité en 0 en posant $f_8(0) = 0$. Passons au calcul de la dérivée, pour laquelle on posera au numpérateur $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ pour se simplifier la vie : $f_8'(x) = \dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(e^x-1) - x^{\frac{3}{2}}e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{\sqrt{x}(3e^x - 3 - 2xe^x)}{2(e^x-1)^2}$. Le calcul de la limite de la dérivée en 0 n'est vraiment pas naturel avec les moyens dont nous disposons actuellement, mais on peut quand même s'en sortir : $f_8'(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{x}(e^x-1)} \times \dfrac{x}{e^x-1} \times \left(\dfrac{3(e^x-1)}{x} - 2e^x\right)$ (vérifiez, je n'ai rien ajouté !), le dernier morceau dans la parenthèse tend vers 1 en utilisant la limite classique déjà exploitée plus haut, le deuxième quotient juste devant aussi, et le premier, à cause du $\sqrt{x}$ au dénominateur, a une limite infinie en 0. La fonction n'est donc pas dérivable en 0, sa courbe y admet une tangente verticale. Le signe de $3e^x - 3 - 2xe^x$ n'a par ailleurs hélas rien d'évident, si on dérive on trouve du $3e^x - 2e^x - 2xe^x = e^x(1-2x)$. Notre expression est donc croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et décroissante ensuite, vaut 0 en 0 et a pour limite $-\infty$ en $+\infty$. Elle s'annule donc une fois, pour une valeur de x supérieure à $\dfrac{1}{2}$ et légèrement inférieure à 1 puisque $3e - 3 - 2e = e - 3 < 0$. On ne cherchera pas à en savoir plus, ni à calculer la dérivée seconde de f_8. Notons simplement que la croissance comparée permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_8(x) = 0$, et traçons une allure de courbe :



- Pour finir en beauté, plein de fonctions d'un coup. Il était sous-entendu dans l'énoncé que n désignait un entier naturel, les fonctions sont donc toutes définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Si $n = 0$, la fonction n'a pas de limite en 0, on peut trouver facilement deux suites de réels tendant vers 0 mais dont la limite des images par f_0 est différente. Par exemple $f_0\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right) = \sin(2n\pi) = 0$ mais $f_0\left(\dfrac{1}{(2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = \sin\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. D'après la caractérisation séquentielle de la limite, la fonction f_0 n'a pas de limite en 0. Toutes les autres fonctions sont par contre prolongeables par continuité en posant $f_n(0) = 0$, car on peut écrire l'encadrement $-x^n \leqslant x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant x^n$, qui suffit à assurer que $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = 0$.
  Passons à la dérivée (si $n \neq 0$) : $f_n'(x) = nx^{n-1}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^n \times \dfrac{-1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = nx^{n-1}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - x^{n-2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. À partir de $n = 3$, pas de problème, tout cela va gentiment tendre vers 0 en

faisant un petit encadrement, donc les fonctions f_n sont alors dérivables (avec une tangente horizontale) en 0. Pour $n = 2$, le premier terme tend vers 0 mais le deuxième n'a pas de limite (même raison que ci-dessus), la fonction n'est pas dérivable. Enfin, si $n = 1$, la dérivée vaut $\sin(X) - X\cos(X)$, où on a posé $X = \frac{1}{x}$. Là encore, il n'est pas difficile de construire des suites donnant des limites différentes pour cette expression en 0, donc la fonction n'est pas dérivable non plus. Ici, chercher à calculer la dérivée seconde ou même à étudier les variations n'a à peu près aucun intérêt. Pour information, voici une allure de la courbe de $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ aux alentours de 0 (avec en pointillés les deux bissectrices entre lesquelles se trouve la courbe) :



Exercice 2 (**)

Par un calcul direct, on trouve $f'(x) = 2nx^{2n-1}$, puis $f''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2}$, jusqu'à $f^{(n)}(x) = 2n(2n-1)\dots(n+1)x^n = \frac{(2n)!}{n!}x^n$ (si on tient vraiment à faire une récurrence pour être ultra rigoureux, on peut). Autre méthode, on écrit $f(x) = g(x) \times g(x)$, où $g(x) = x^n$. Par la formule de Leibniz, $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$. Or, par un calcul extrêmement similaire à celui des dérivées successives de f, $g^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$. On peut donc en déduire que $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \times \frac{n!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!^2}{k!(n-k)!} x^n = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 x^n$. En comparant avec la première expression obtenue, on peut identifier : $n! \sum k = 0^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!}$, soit $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n! \times n!} = \binom{2n}{n}$ (et pour vous entrainer, à la maison, vous redémontrerez cette égalité par récurrence, ce qui est loin d'être trivial).

Exercice 3 (*)

Cherchons donc si le taux d'accroissement de g en a admet une limite : $\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h} = \dfrac{|f(a+h)|-|f(a)|}{h} = \dfrac{|f(a+h)|^2-|f(a)|^2}{h(|f(a)|+|f(a+h)|)}$. En écrivant les carrés des modules sous la forme du produit par le conjugué, $|f(a+h)|^2-|f(a)|^2 = f(a+h)\overline{f(a+h)} - f(a)\overline{f(a)} = (f(a+h)-f(a))\overline{f(a+h)} + f(a)(\overline{f(a+h)-f(a)})$. En utilisant le fait que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ (et similairement avec le conjugué), on trouve donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(a+h)-g(a)}{h} = \dfrac{f'(a)\overline{f(a)} + f(a)\overline{f'(a)}}{|f(a)|^2} = \dfrac{2\mathrm{Re}\ (f(a)f'(a))}{|f(a)|^2}$. La fonction g est donc dérivable si $f'(a) \neq 0$, et on peut alors dire que $g'(a) = \dfrac{2\mathrm{Re}\ (f(a)f'(a))}{|f(a)|^2}$.

Exercice 4 (**)

1. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est dérivable sur $]0;a]$. Par ailleurs, puisque $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 0$, on peut prolonger g par continuité en une fonction continue sur $[0;a]$ en posant $g(0) = 0$. Comme $g(a) = \dfrac{f(a)}{a} = 0$, la fonction g vérifie toutes les hypothèses du théorème de Rolle, et sa dérivée g' s'annule donc (au moins) une fois sur $]0;a[$.
2. La dérivée de la fonction g se calcule aisément : $g'(x) = \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. Elle s'annule d'après la question précédente en un certain réel $c \neq 0$, qui vérifie donc $cf'(c) - f(c) = 0$, soit $cf'(c) = f(c)$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse c a donc pour équation $y = f'(c)(x-c) + f(c) = f'(c)x - cf'(c) + f(c) = f'(c)x$. Cette droite passe effectivement par l'origine.

Exercice 5 (***)

1. En calculant les premières dérivées (on peut avantageusement commencer l'exercice par la deuxième question ici), on devine que P sera un polynôme de degré n. Prouvons donc directement par récurrence que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$, où $d^\circ(P_n) = n$. C'est vrai au rang $n = 0$ en posant brillamment $P_0 = 1$, qui est bien de degré 0. Supposons la propriété vraie au rang n, alors $f^{(n+1)(x)} = \left(\dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\right)' = \dfrac{P_n'(x)(1+x^2)^{n+1} - (n+1)\times 2xP_n(x)(1+x^2)^n}{(1+x^2)^{2n+2}} = \dfrac{(1+x^2)P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}}$, qui est bien de la forme demandée en posant $P_{n+1} = (1+X^2)P_n' - 2(n+1)XP_n$. Reste à déterminer le degré de ce P_{n+1}, qui est bien un polynôme. Si on nota a_nX^n le coefficient dominant de P_n, alors celui de $(1+X^2)P_n'$ sera $X^2 \times na_nX^{n-1} = na_nX^{n+1}$, et celui de $2(n+1)XP_n$ sera $2(n+1)a_nX^{n+1}$, ce qui donne pour P_{n+1} un terme dominant égal à $-(n+2)a_nX^{n+1}$, ce qui prouve que P_{n+1} est de degré $n+1$ (puisque $n+2$ ne peut pas s'annuler).
2. Soit en utilisant les relations obtenues à la question précédentes, soit par un calcul direct, on trouve $f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, soit $P_1 = -2X$, qui a bien sûr pour unique racine 0 ; puis $f''(x) = \dfrac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$, donc $P_2 = 2(3X^2-1)$, qui admet deux racines réelles égales à $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; et enfin $f'''(x) = \dfrac{12x(1+x^2)^3 - 6x(6x^2-2)(1+x^2)^2}{(1+x^2)^6} =$

$\dfrac{12x + 12x^3 - 36x^3 + 12x}{(1+x^2)^4} = \dfrac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$, donc $P_3 = 24X(1-X^2)$, qui s'annule exactement trois fois, en 0, 1 et -1.

3. En effet, si $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, alors $(x^2+1)f(x) = 1$. On peut certainement appliquer la formule de Leibniz : en ponsant $g(x) = x^2 + 1$, alors $(fg)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x)$. Or, si $n \geqslant 1$, $(fg)^n(x) = 0$ puisque fg estla fonction constante égale à 1. Par ailleurs, les dérivées successives de la fonction g se calculent très facilement : $g'(x) = 2x$, $g''(x) = 2$, et ensuite plus rien. La formule de Leibniz se résume donc à $\binom{n}{0} g(x) f^{(n)}(x) + \binom{n}{1} g'(x) f^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} g''(x) f^{(n-2)}(x) = 0$, soit en reprenant les notations de la première question $(1+x^2) \times \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}} + 2nx \dfrac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n} + n(n-1)\dfrac{P_{n-2}(x)}{(1+x^2)^{n-1}}$. Quitte à tout multiplier par $(1+x^2)^n$ pour faire disparaitre les dénominateurs, on obtient $P_n(x) + 2nxP_{n-1}(x) + n(n-1)(1+x^2)P_{n-2}(x) = 0$. C'est exactement l'égalité demandée à un décalage près (on remplace tous les n par des $n+1$).
4. On compare la formule qu'on vient d'obtenir : $P_{n+1}(x) + 2(n+1)xP_n(x) + n(n+1)(1+x^2)P_{n-1}(x) = 0$, avec celle obtenue dans la première question : $P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x)$. On peut remplacer le $P_{n+1}(x)$ de la première équation par l'expression donnée par la deuxième, les termes en $2(n+1)xP_n(x)$ s'annulent et il ne reste que $(1+x^2)P_n'(x) + n(n+1)(1+x^2)P_{n-1}(x) = 0$, soit $P_n'(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x)$.
5. On s'en doute, la réponse est non. Supposons donc que P_n admette une racine (au moins) double x, alors d'après la caractérisation des racines doubles (cf cours du chapître sur les polynomes), $P_n'(x) = 0$. La relation de la question précédente implique alors $P_{n-1}(x) = 0$. Mais alors, comme $P_n(x) = (1+x^2)P_{n-1}'(x) - 2nxP_{n-1}(x)$ (c'est la relation de la première question, simplement décalée), on aura certainement $(1+x^2)P_{n-1}'(x) = 0$, puis $P_{n-1}'(x)$, et x sera donc racine double de P_{n-1}. Bon, mais en suivant le même raisonnement, x sera encore racine double de P_{n-2}, etc. Allez, faisons un raisonnement rigoureux : notons n_0 le plus petit entier naturel pour lequel P_n admet une racine double. Cet entier n'est sûrement pas égal à 0, puisque le polynôme P_0 n'a pas de racine (ni 1, 2 ou 3 d'ailleurs d'après les calculs de la deuxième question). Mais alors, si $n_0 \geqslant 1$, d'après le raisonnement précédent, P_{n_0-1} admet aussi une racine double (la même que P_{n_0}), ce qui contredit complètement la minimalité de l'entier n_0. Cet entier ne peut donc pas exister, et aucun des polynômes P_n n'admet de racine double.

Exercice 6 (***)

Comme le signale l'énoncé de l'exercice, on va faire, non pas une récurrence sur l'entier n, mais fixer ce n une bonne fois pour pour toutes et montrer par récurrence sur k que, $\forall k \leqslant n$, la fonction $f^{(k)}(x)$ s'annule (au moins) k fois entre -1 et 1 (et même dans $]-1;1[$ pour être précis). C'est évidemment vrai au rang 0 : la fonction f s'annule au moins 0 fois sur $]-1;1[$ (en l'occurence, elle ne s'annule effectivement pas puisque f s'annule uniquement en 1 et en -1, sauf pour $n = 0$). Supposons que notre dérivée k-ème s'annule bien k fois, en des valeurs que l'on va noter x_1, x_2, …, x_k vérifiant $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < 1$. On sait par ailleurs que, comme $f(x) = (1-x^2)^n$, $f'(x) = -2nx(1-x^2)^{n-1}$, puis $f''(x) = -2n(1-x^2)^{n-1} + 2n(n-1)x^2(1-x^2)^{n-2} = (-2n(1-x^2) + 2n(n-1)x^2)(1-x^2)^{n-2}$ etc. On prouve par une récurrence facile que $f^{(k)}(x) = P_k(x)(1-x^2)^{n-k}$ pour tout entier $k \leqslant n$ (au-delà, ça ne marche plus !), où P_k est un polynôme que l'on ne cherchera absolument pas à expliciter (si vous y tenez, pour l'hérédité, on calcule $(P_k(x)(1-x^2)^{n-k})' = (P_k'(x)(1-x^2) - 2x(n-k)P_k(x))(1-x^2)^{n-k-1}$). Ce qui est important pour nous, c'est ce $(1-x^2)^{n-k}$ en facteur qui assure que, si $k \leqslant n-1$, $f^{(k)}(x)$ s'annule en 1 et en -1 en plus des racines déjà obtenues grâce à l'hypothèse de récurrence. On peut alors appliquer le théorème de Rolle sur chacun des intervalles $[-1, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{k-1}, x_k]$, $[x_k, 1]$. Puisque $f^{(k)}$ s'annule aux deux bornes de chacun de ces intervalles, sa dérivée $f^{(k+1)}$ s'annule à l'intérieur de chaque intervalle, ce qui prouve l'existence de $z_1 \in]-1, x_1[$, $z_2 \in]x_1, x_2[$, $\dots z_{k+1} \in]x_k, 1[$ annulant $f^{(k+1)}$. On a en particulier prouvé que $f^{(k+1)}$ s'annule (au moins) en $k+1$ réels distincts de l'intervalle $]-1, 1[$, ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence. Puisque cette hérédité fonctionne jusqu'à $k = n-1$, la dernière propriété obtenue grâce à cette récurrence stipule que $f^{(n)}$ admet n racines distinctes dans $]-1; 1[$. Or, en tant que dérivée n-ème d'un polynôme de degré $2n$, la fonction $f^{(n)}$ est certainement un polynôme de degré n, et ne peut donc admettre plus de n racines, ni de racine double si elle admet déjà n racines distinctes. Autrement dit, on est certain que les n racines trouvées sont les seules racines de $f^{(n)}$ et qu'elles sont simples. Accessoirement, elles sont toutes dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Exercice 7 (**)

1. Posons donc $h : x \mapsto f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$. La fonction h est évidemment continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. De plus, $h(a) = f(a)g(b) - f(a)g(a) - g(a)f(b) + g(a)f(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$, et $h(b) = f(b)g(b) - f(b)g(a) - g(b)f(b) + g(b)f(a) = h(a)$. La fonction h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, sa dérivée s'annule sur $]a; b[$. Comme cette dérivée vaut $h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))$, le point d'annulation de la dérivée vérifie exactement l'équation de l'énoncé.
2. Plaçons-nous sur un voisinage de a où toutes les hypothèses sont vérifiées, si on note b un point d'un tel voisinage, il existe d'après la question précédente un x entre a et b tel que $f'(x)g(b) = g'(x)f(b)$ (par hypothèse, $f(a) = g(a) = 0$), ou encore $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{f(b)}{g(b)}$. Si on fait tendre b vers a, puisque x est compris entre a et b, x tend également vers a, donc $\lim\limits_{b \to a} \dfrac{f(b)}{g(b)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$.
3. On vérifie aisément que les hypothèses de la question précédente sont présentes : en posant $f(x) = 1 - \cos(x)$ et $g(x) = x^2$, $f(0) = g(0) = 0$, les deux fonctions sont continues et dérivables partout, et les deux fonctions ne s'annulent pas sur $]-\pi; \pi[$. Enfin, $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{\sin(x)}{2x}$ a bien une limite finie en 0, en l'occurence $\dfrac{1}{2}$ en utilisant la limite classique $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. On conclut de l'application de la règle de l'Hôpital que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.
   Le deuxième cas est très similaire : on pose $f(x) = \ln(1+x) - x$ et $g(x) = x^2$, les deux fonctions s'annulent en 0, sont évidemment dérivables et $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \dfrac{-x}{(1+x)2x} = -\dfrac{1}{2(1+x)}$ a pour limite $-\dfrac{1}{2}$ en 0. On conclut comme précédemment que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$, ou encore que $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x - \dfrac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. C'est le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0, développement limité dont on peut obtenir la suite par la même méthode. Si on pose désormais $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$ et $g(x) = x^3$, les fonctions vérifient les hypothèses de la règle de l'Hôpital, et $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{\frac{1}{1+x} - 1 + x}{3x^2} = \dfrac{1 + x^2 - 1}{3x^2(1+x)} = \dfrac{1}{3(1+x)}$, qui a pour limite $\dfrac{1}{3}$ quand x tend vers 0. Autrement dit, $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x)$. Vous pouvez deviner la suite, on le démontrera dans un prochain chapître.

Exercice 8 (***)

1. En posant $x = y = 0$, on trouve $f(0)(1 - f(0)^2) = 2f(0)$, donc soit $f(0) = 0$, soit $1 - f(0)^2 = 2$, ce qui est impossible car cela impliquerait $f(0)^2 = -1$. On peut donc conclure directement que $f(0) = 0$.
2. On fixe dans l'égalité précédente la valeur de y et on dérive pour obtenir $f'(x+y)(1-f(x)f(y)) - f'(x)f(y)f(x+y) = f'(x)$. Posons alors $x = 0$ et n'oublions pas que $f(0) = 0$ pour trouver $f'(y) - f'(0)f(y)^2 = f'(0)$, soit $f'(0)(1 + f(y)^2) = f'(y)$, ou encore (on peut diviser, ça ne s'annule jamais) $\dfrac{f'(y)}{1 + f(y)^2} = f'(0)$. La variable importe peu, on peut remplacer les y par des x pour trouver la formule de l'énoncé.
3. Notons $a = f'(0)$, on vient de prouver que $\dfrac{f'(x)}{1 + f(x)^2} = a$, soit $(\arctan(f(x)))' = a$. Il suffit d'intégrer cette équation pour trouver $\arctan(f(x)) = ax + b$, où a et b sont effectivement deux constantes réelles.
4. Le problème de l'égalité précédente, c'est qu'on sait bien que la fonction arctan ne prend ses valeurs qu'entre -1 et 1. En particulier, $\arctan(f(x)) \in]-1, 1[$ quelle que soit la fonction f. On devrait donc avoir, $\forall x \in \mathbb{R}$, $ax + b \in]-1, 1[$. Ce n'est possible que si $a = 0$, donc si la fonction f est constante égale à b. Comme on sait que $f(0) = 0$, la constante b est nécessairement nulle, et la fonction f est donc nulle. Réciproquement, la fonction nulle est bien solution du problème posé.

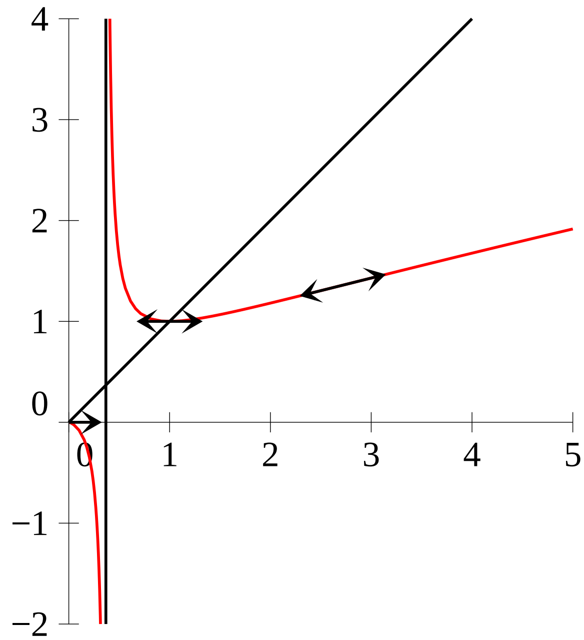
Exercice 9 (**)

1. La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x$. Elle admet donc un maximum en $x = 2$, de valeur $f(2) = 1 + \dfrac{1}{4}(2 - 4) = \dfrac{3}{2}$, et est croissante sur $]-\infty; 2]$ et décroissante sur $[2; +\infty[$. Les points fixes sont déterminés en résolvant l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{4}(2 - x^2) = 0$, d'où deux points fixes pour $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$.
2. En effet, si $1 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant -\dfrac{1}{2}x \leqslant -\dfrac{1}{2}$ et $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Quant à l'image de $[1; 2]$ par f, comme la fonction est croissante sur cette intervalle, elle vaut $[f(1); f(2)] = \left[\dfrac{5}{4}; \dfrac{3}{2}\right] \subset [1; 2]$.
3. C'est une récurrence toute simple : $u_0 = 1 \in [1; 2]$, et si $u_n \in [1; 2]$, on a d'après la question précédente $f(u_n) \in [1; 2]$, soit $u_{n+1} \in [1; 2]$. Comme $u_n \in [1; 2]$ et $\sqrt{2} \in [1; 2]$, et que $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ sur cet intervalle, on peut appliquer l'IAF entre u_n et $\sqrt{2}$ et obtenir $|f(u_n) - f(\sqrt{2})| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$. Comme $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ (c'est un point fixe de f) et $f(u_n) = u_{n+1}$ (par définition), on a bien $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
4. Prouvons par récurrence $P_n : |u_n - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Pour $n = 0$, la propriété P_0 stipule que $|1 - \sqrt{2}| \leqslant 1$, ce qui est vrai. Supposons désormais P_n vraie, on a alors d'après la question précédente $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$, et par ailleurs, par hypothèse de récurrence $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. On peut combiner les deux inégalités pour obtenir $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Cela prouve P_{n+1} et achève la récurrence.
   Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, et $0 \leqslant |u_n - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \sqrt{2}| = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}$.

5. On sait que l'inégalité sera vérifiée dès que $\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-9}$, soit en passant au logarithme $-n \ln 2 \leqslant -9 \ln 10$, ou encore $n \geqslant \frac{9 \ln 10}{\ln 2} \simeq 30$. Il faut donc calculer le trentième terme de la suite pour être certain d'avoir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-9} près. En pratique, on constate en fait que le terme u_{19} est déjà une valeur approchée à 10^{-9} près.

Exercice 10 (**)

1. En effet, on a $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ (pas de forme indéterminée). De plus, f est dérivable et C^1 sur $\left]0; \frac{1}{e}\right[$, de dérivée $f'(x) = \frac{\ln x + 1 - 1}{(\ln x + 1)^2} = \frac{\ln x}{(\ln x + 1)^2}$, qui a également pour limite 0 en 0 (en factorisant par exemple par $\ln(x)$ en haut et en bas). D'après le théorème de prolongement de la dérivée, la fonction f est donc dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.
2. On a déjà calculé f', il est donc facile de constater que f est décroissante sur $\left[0; \frac{1}{e}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{e}; 1\right]$, et croissante sur $[1; +\infty[$. On peut ainsi tracer la courbe suivante (il y a un point d'inflexion indiqué sur la courbe, ne faites pas attention) :



3. Résolvons $f(x) = x$. Si on élimine la valeur 0 (qui est effectivement un point fixe de f), on peut simplifier par x et obtenir $\frac{1}{\ln x + 1} = 1$, soit $\ln x + 1 = 1$, donc $x = 1$. Il y a donc deux points fixes : 0 et 1.
4. (a) La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $g'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$. Elle admet donc un maximum en 1, de valeur $g(1) = \frac{1}{4}$. Comme $g(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, on en déduit que $\forall x \geqslant 0$, $0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{4}$. Or, on a $f'(x) = g(\ln x)$. Si $x \geqslant 1$, $\ln x \geqslant 0$, et on peut lui appliquer l'inégalité précédente : $0 \leqslant g(\ln x) \leqslant \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{4}$.
   (b) Pour appliquer l'IAF, il faut d'abord vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [1; +\infty[$. En constatant que l'intervalle $[1; +\infty[$ est stable par f, on peut le prouver par une simple récurrence :

$x_0 = 2 \geqslant 1$, et en supposant $x_n \geqslant 1$, on obtient, en utilisant la croissance de f sur $[1;+\infty[$, $f(x_n) \geqslant f(1) = 1$, donc $x_{n+1} \geqslant 1$, ce qui achève la récurrence.

On a donc $1 \in [1;+\infty[$ et $x_n \in [1;+\infty[$. De plus, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$ sur $[1;+\infty[$. En appliquant l'IAF, on obtient donc $|f(x_n) - f(1)| \leqslant |x_n - 1|$, soit $|x_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{1}{4}|x_n - 1|$.

Prouvons ensuite par récurrence la propriété P_n : $|x_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$. Pour $n = 0$, P_0 stipule que $|2-1| \leqslant 1$, ce qui est vrai. Supposons ensuite P_n vraie, on obtient alors $|x_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{1}{4}|x_n - 1|$ (cf plus haut) $\leqslant \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4^n}$ (hypothèse de récurrence), ce qui prouve P_{n+1} et achève la récurrence.

(c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4^n} = 0$, et $0 \leqslant |x_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n - 1| = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Exercice 11 (***)

1. La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions usuelles. Par ailleurs, en tant que quotient de fonctions impaires, la fonction f est paire.

2. On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x} = 1$ (et si on ne le sait pas, on le retrouve par exemple en constatant que $\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x}$ est le taux d'accroissement de sh en 0, et a donc pour limite $\operatorname{ch}(0) = 1$ en 0), donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)} = 1$, et on peut prolonger la fonction f en posant $f(0) = 1$. La dérivée de f est $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(x)}$. Pas de méthode simple malheureusement pour calculer la limite en 0 de cette dérivée, il faut soit utiliser des développements limités (c'est alors très simple) soit au moins avoir recours à la règle de l'Hôpital de l'exercice 8. On peut alors écrire, sous réserve d'existence de toutes ces limites, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch}(x) - \operatorname{ch}(x) - x\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)}$.
Ce quotient a manifestement pour limite 0 en 0. La fonction f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$. Ce n'est pas une surprise dans la mesure où la fonction est paire. Passons à la dérivée seconde : $f''(x) = \dfrac{-x\operatorname{sh}^3(x) - 2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)(\operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x))}{\operatorname{sh}^4(x)} = \dfrac{2x\operatorname{ch}^2(x) - 2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x) - x\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{sh}^3(x)}$.
Tentons une fois de plus le recours à la règle de l'Hôpital, le quotient des dérivées vaut $\dfrac{2\operatorname{ch}^2(x) + 4x\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x) - 2\operatorname{ch}^2(x) - 2\operatorname{sh}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) - 2x\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)}{3\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}^2(x)}$
$= \dfrac{2x\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x) - 3\operatorname{sh}^2(x)}{3\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}^2(x)} = \dfrac{2x\operatorname{ch}(x) - 3\operatorname{sh}(x)}{3\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{2}{3}\dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)} - \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}$, qui a pour limite $-\dfrac{1}{3}$ en 0, donc par applciation du théorème de prolongement de la dérivée (à la dérivée de f), la fonction f est deux fois dérivable en 0 et $f''(0) = -\dfrac{1}{3}$.
Pour les curieux, avec les développements limités, on aurait simplement pu écrire ceci : $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x}{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \dfrac{1}{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = 1 - \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)$ et en déduire immédiatement les valeurs demandées.

3. Il s'agit de résoudre l'équation $e^x - e^{-x} = 2$, soit $e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$ quitte à multiplier par e^x. En posant $X = e^x$, on se ramène à l'équation du second degré $X^2 - 2X - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8$, et admet deux solutions $X_1 = \dfrac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$, et $X_2 = 1 + \sqrt{2}$. Puisque $X_1 < 0$, on peut éliminer cette solution, et garder comme unique solution de l'équation initiale $\alpha = \ln(X_2) = \ln(1 + \sqrt{2})$. Comme $1 + \sqrt{2} < e$ (on a environ $2,42$ à gauche, et $2,72$ à

droite), $\alpha \in]0;1[$. Comme on sait que $\mathrm{ch}^2(\alpha) - \mathrm{sh}^2(\alpha) = 1$, on peut dire que $\mathrm{ch}^2(\alpha) = 2$, donc $\mathrm{ch}(\alpha) = \sqrt{2}$ (cette fonction ne prenant que des valeurs positives).

4. La fonction $g : t \mapsto \mathrm{ch}(t) - t$ a pour dérivée $\mathrm{sh}(t) - 1$, dont on vient de voir qu'elle s'annule uniquement en α. La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha, +\infty[$. Elle admet pour minimum $g(\alpha) = \mathrm{ch}(\alpha) - \alpha = \sqrt{2} - \alpha > 0$ puisque $\alpha \in]0, 1[$. La fonction g est donc strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pour démontrer les inégalités suivantes, commençons par poser $h(t) = t\,\mathrm{ch}(t) - \mathrm{sh}(t)$, alors $h'(t) = \mathrm{ch}(t) + t\,\mathrm{sh}(t) - \mathrm{ch}(t) = t\,\mathrm{sh}(t) \geqslant 0$. La fonction h est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$, comme $h(0) = 0$, la fonction h est positive. Posons désormais $i(t) = \dfrac{1}{2}\mathrm{sh}^2(t) - t\,\mathrm{ch}(t) + \mathrm{sh}(t)$, on calcule $i'(t) = \mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}(t) - t\,\mathrm{sh}(t) = \mathrm{sh}(t)(\mathrm{ch}(t) - t) \geqslant 0$ d'après le début de la question. La fonction i est donc croissante, et s'annule elle aussi en 0, elle est positive, ce qui prouve la deuxième inégalité.

5. La fonction f étant décroissante sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (par croissance comparée), elle admet nécessairement un point fixe sur $[0; +\infty[$. Vous n'êtes pas convaincus ? Posez $g(x) = f(x) - x$, alors g est elle aussi décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (même si c'est ici inutile de s'en rendre compte), vérifie $g(0) = 1$, et $g(1) = f(1) - 1 < 0$, puisque $f(1) < f(0) = 1$, donc en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction g, celle-ci s'annule entre 0 et 1, ce qui correspond à un point fixe de f. En fait, on connait très bien ce point fixe : c'est α puisque $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\mathrm{sh}(\alpha)} = \alpha$ (par définition, $\mathrm{sh}(\alpha) = 1$). La fonction f' étant majorée en valeur absolue par $\dfrac{1}{2}$ d'après la question précédente, on peut écrire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$, soit $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$. Par une récurrence facile (et très classique), on prouve alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$: c'est vrai au rang 0 car $|u_0 - \alpha| = \alpha \leqslant 1$, et en le supposant au rang n, alors $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Une simple application du théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

Problème (***)

1. (a) C'est une équation du second degré, qu'on sait très bien résoudre : $\Delta = 1 + 4 = 5$, $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. La deuxième solution est manifestement négative, quant à la première, on peut l'encadrer en partant de $4 < 5 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3$, donc $\dfrac{1}{2} < x_1 < 1$. il y a donc bien une solution unique à l'équation sur l'intervalle $]0; 1[$.

   (b) Si $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, on a $\dfrac{3}{2} \leqslant x + 1 \leqslant 2$, donc $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$. Comme $\dfrac{2}{3} < 1$, on en déduit que $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

   (c) La fonction f est bien sûr dérivable sur son ensemble de définition, et $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$. En reprenant la question précédente, si $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, on a $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{2}{3}$, donc en élevant au carré (tout est positif), $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{(x+1)^2} \leqslant \dfrac{4}{9}$, soit $\dfrac{1}{2} \leqslant |f'(x)| \leqslant \dfrac{4}{9}$.

   (d) Commençons par prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$: $u_0 = 1$ appartient bien à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$. Supposons désormais que $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$, alors d'après les questions précédentes $\dfrac{1}{2} \leqslant f(u_n) \leqslant 1$, soit $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, ce qui achève la récurrence.

Constatons par ailleurs que r_2 est un point fixe de la fonction f : on sait que r_2 vérifie $r_2^2+r_2-1=0$, soit $r_2(r_2+1)=1$, donc $r_2=\dfrac{1}{r_2+1}$ ou encore $f(r_2)=r_2$.
On peut désormais appliquer l'IAF à u_n et r_2, qui appartiennent tous deux à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$ (cf questions précédentes), sur lequel on a vu que $|f'(x)|\leqslant\dfrac{4}{9}$. On en déduit que $|f(u_n)-r_2|\leqslant\dfrac{4}{9}|u_n-r_2|$, soit $|u_{n+1}-r_2|\leqslant\dfrac{4}{9}|u_n-r_2|$.

Montrons enfin par récurrence la propriété $P_n : |u_n-r_2|\leqslant\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$. Pour $n=0$, $|u_0-r_2|=|1-r_2|\leqslant 1$ car $r_2\in]0;1[$, ce qui prouve P_0. Si on suppose P_n vérifiée, on peut faire le calcul suivant en utilisant successivement le résultat précédent et l'hypothèse de récurrence : $|u_{n+1}-r_2|\leqslant\dfrac{4}{9}|u_n-r_2|\leqslant\dfrac{4}{9}\times\left(\dfrac{4}{9}\right)^n\leqslant\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n+1}$. Cette dernière inégalité prouve P_{n+1} et achève donc la récurrence.
Comme $\dfrac{4}{9}<1$, la suite $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$ converge vers 0, et le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-r_2|=0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=r_2$.

2. (a) Cette fois-ci, on ne sait pas résoudre l'équation, il faut donc étudier un peu le polynome x^3+x^2+x-1. Sa dérivée, $3x^2+2x+1$, a un discriminant négatif, elle est donc toujours positive. La fonction $x\mapsto x^3+x^2+x-1$ est donc strictement croissante et bijective sur $\mathbb{R}$. Comme elle prend la valeur -1 pour $x=0$ et la valeur 2 pour $x=1$, on en déduit qu'elle s'annule entre 0 et 1. L'équation proposée a donc une unique solution (à cause de la bijectivité) qui appartient à l'intervalle $]0;1[$.

   (b) Le trinome x^2+x+1 étant strictement croissant sur $\mathbb{R}_+$, on aura, si $\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$, $f(1)\leqslant f(x)\leqslant f\left(\dfrac{1}{3}\right)$. Comme $f(1)=\dfrac{1}{3}$ et $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1}<1$, on aura bien $\dfrac{1}{3}\leqslant f(x)\leqslant 1$, donc l'intervalle est stable.

   (c) La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (son dénominateur ayant un discriminant négatif, il ne s'annule jamais), et $g'(x)=-\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$; et en dérivant g' comme un produit,
$g''(x)=-\dfrac{2}{(x^2+x+1)^2}-(2x+1)\times\dfrac{-2(2x+1)}{(x^2+x+1)^3}=\dfrac{2(2x+1)^2-2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^3}$
$=\dfrac{8x^2+8x+2-2x^2-2x-2}{(x^2+x+1)^3}=\dfrac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$. Cette dérivée seconde étant toujours positive sur $\left[\dfrac{1}{3};1\right]$, la dérivée g' y est strictement croissante. Comme $g'\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\frac{2}{3}+1}{(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1)^2}=\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{169}{81}}=\dfrac{135}{169}$ et $g'(1)=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$, on peut en déduire que $\forall x\in\left[\dfrac{1}{3};1\right]$, $|g'(x)|\leqslant\dfrac{135}{169}$.

   (d) On aimerait appliquer l'IAF à r_3 et à v_n en utilisant la majoration de $|f'(x)|$ obtenue à la question précédente. Il faut pour cela vérifier que v_n est toujours dans cet intervalle, ce qui se fait en utilisant la stabilité de l'intervalle par une récurrence identique à celle du début la question 1.*d* ; et que $r_3\in\left[\dfrac{1}{3};1\right]$ et est un point fixe de g. Comme $\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3}-1=\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{14}{27}<0$, on a effectivement $r_3\geqslant\dfrac{1}{3}$ (cf étude de la question *a*). De plus, $r_3^3+r_3^2+r_3-1=0\Rightarrow r_3(r_3^2+r_3+1)=1\Rightarrow r_3=f(r_3)$, donc r_3 est un point fixe de f. On peut donc bien appliquer l'IAF pour obtenir $|f(v_n)-f(r_3)|\leqslant\dfrac{135}{169}|v_n-r_3|$, soit $|v_{n+1}-r_3|\leqslant\dfrac{135}{169}|v_n-r_3|$.

On fait ensuite notre petite récurrence classique pour prouver que $|u_n - r_3| \leqslant \left(\frac{135}{169}\right)^n$ (comme dans la question 1.d, on majore $|v_0 - r_3|$ par 1 en utilisant que $\frac{1}{3} \leqslant r_3 \leqslant 1$, et le reste de la récurrence est identique en remplaçant les $\frac{4}{9}$ par des $\frac{135}{169}$).

La conclusion est également la même : $\frac{135}{169} < 1$ donc le membre de droite de notre inégalité tend vers 0, et en appliquant le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} |v_n - r_3| = 0$, c'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty} v_n = r_3$.

3. (a) La fonction h_n est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $h_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1$. La fonction h_n étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle y est bijective. Comme $h_n(0) = -a < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} h_n(x) = +\infty$, on en déduit que l'équation $h_n(x) = 0$ a bien une solution (unique par bijectivité) sur $[0; +\infty[$. De plus, on a $h_n(1) = n - a$, donc $h_n(1) > 0$ si $n > a$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, h_n s'annule alors sur l'intervalle $]0; 1[$ et $t_n \in]0; 1[$.

   (b) C'est un simple calcul : $(x-1)h_n(x) = (x-1)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a) = x^{n+1} + x^n + \cdots + x^3 + x^2 - ax - x^n - x^{n-1} - \cdots - x^2 - x + a = x^{n+1} - ax - x + a = x^{n+1} - (a+1)x + a$.

   (c) Notons que $h_{n+1}(x) = x^{n+1} + h_n(x)$. Comme $h_n(t_n) = 0$ (par définition), on a donc $h_{n+1}(t_n) = t_n^{n+1} > 0$, donc $h_{n+1}(t_n) > h_n(t_n)$. Comme par ailleurs on a aussi, toujours par définition, $h_{n+1}(t_{n+1}) = 0$, on en déduit que $h_{n+1}(t_n) > h_{n+1}(t_{n+1})$. La fonction h_{n+1} étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, cela implique $t_n > t_{n+1}$, et la suite (t_n) est donc strictement décroissante. Étant minorée par 0, elle est donc convergente.

   (d) On vient de voir que la suite (t_n) était décroissante, donc $\forall A \geqslant n$, $0 < t_n \leqslant t_A$, et comme t_n et t_A sont tous deux strictement inférieurs à 1, $0 < t_n^n \leqslant t_A^n$. Fixons donc $A \geqslant a$ (de façon à ce que t_A soit une constante). Comme $t_A < 1$ dans ce cas, $\lim_{n\to+\infty} t_A^n = 0$. En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} t_n^n = 0$.

   (e) En reprenant la relation obtenue à la question b et en l'appliquant pour $x = t_n$, on obtient $0 = t_n^{n+1} - (a+1)t_n + a$, soit $(a+1)t_n - a = t_n \times t_n^n$. Le membre de droite convergeant vers 0 d'après la question précédente, on a donc $\lim_{n\to+\infty} (a+1)t_n - a = 0$, soit $\lim_{n\to+\infty} t_n = \frac{a}{a+1}$.

4. (a) Tout comme pour la fonction h_n, i_n est dérivable de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, donc y est strictement croissante et bijective. Comme $i_n(0) = -a < 0$, et $\lim_{x\to+\infty} i_n(x) = +\infty$, la fonction s'annule nécessairement une unique fois sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $i_n(1) = n + n - 1 + \cdots + 2 + 1 - a = \frac{n(n+1)}{2} - a$. Si $n(n+1) > 2a$, on aura donc $i_n(1) > 0$, et la fonction i_n s'annulera alors sur $]0; 1[$.

   (b) Encore du calcul : $(x-1)^2 i_n(x) = (x^2 - 2x + 1)\sum_{k=1}^{k=n} kx^k - a(x-1)^2 = \sum_{k=1}^{k=n} kx^{k+2} - \sum_{k=1}^{k=n} 2kx^{k+1} + \sum_{k=1}^{k=n} kx^k - a(x-1)^2 = \sum_{k=3}^{k=n+2} (k-2)x^k - \sum_{k=2}^{k=n+1} (2k-2)x^k + \sum_{k=1}^{k=n} kx^k - a(x-1)^2 = (n-1)x^{n+1} + nx^{n+2} - 2x^2 - 2nx^{n+1} + x + 2x^2 - a(x-1)^2 = nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x - a(x-1)^2$.

   (c) Même chose qu'à la question 3.c en constatant que $i_{n+1}(x) = i_n(x) + (n+1)x^{n+1}$, donc $i_{n+1}(y_n) > i_n(y_n)$. On en déduit que $i_{n+1}(y_n) > 0$, soit $i_{n+1}(y_n) > i_{n+1}(y_{n+1})$ puis, par croissance de la fonction i_{n+1}, $y_n > y_{n+1}$. La suite (y_n) est donc décroissante et minorée par 0, elle converge.

   (d) Encore une fois, la décroissance de la suite donne immédiatement l'inégalité, et en fixant A à une valeur convenable, on sait que $y_A < 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} ny_A^n = 0$ (un petit coup de croissance comparée ici) et, par théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} ny_n^n = 0$.

Reprenons alors la relation de la question b, appliquée à $x = y_n$, pour en déduire en passant à la limite que $\lim_{n\to+\infty} y_n + a(y_n - 1)^2 = 0$, soit $\beta - a(\beta - 1)^2 = 0$, soit $a\beta^2 - (1+2a)\beta + a = 0$, équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = (1 + 2a)^2 - 4a^2 = 1 + 4a$, qui est toujours positif, et admet donc deux racines $\beta_1 = \dfrac{1 + 2a + \sqrt{1 + 4a}}{2a}$, et $\beta_2 = \dfrac{1 + 2a - \sqrt{1 + 4a}}{2a}$. Reste à savoir laquelle des deux valeurs est la bonne. On sait que $0 \leqslant \beta < 1$. Or, $\beta_1 > 1$ (son numérateur est plus grand que son dénominateur). On a donc $\beta = \dfrac{1 + 2a - \sqrt{1 + 4a}}{2a}$.