

TD n°8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

9 avril 2015

Exercice 1

1. Deux choses à vérifier : φ est linéaire puisque $\varphi(\lambda P + Q) = (X^2 + 1)(\lambda P(1) + Q(1)) + \lambda P + Q = \lambda(X^2 + 1)P(1) + \lambda P + (X^2 + 1)Q(1) + Q = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$. De plus, $\varphi(P)$ est toujours un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 puisqu'il est somme de $(X^2 + 1)P(1)$, qui est de degré 2 au plus (et même de degré 2 exactement, sauf si $P(1) = 0$), et de P qui est de degré inférieur ou égal à 2. L'application φ est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, qui est de dimension 3, est la famille $(1, X, X^2)$. Calculons donc $\varphi(1) = (X^2 + 1) \times 1 + 1 = X^2 + 2$, puis $\varphi(X) = (X^2 + 1) \times 1 + X = X^2 + X + 1$; et enfin $\varphi(X^2) = (X^2 + 1) \times 1 + X^2 = 2X^2 + 1$. On peut donc affirmer que $\text{im}(\varphi) = \text{Vect}(X^2 + 2, X^2 + X + 1, 2X^2 + 1)$. Reste à déterminer si la famille génératrice obtenue pour l'image est libre, ce qui n'est pas évident. Supposons donc que $a(X^2 + 2) + b(X^2 + X + 1) + c(2X^2 + 1) = 0$, soit $(a + b + 2c)X^2 + bX + 2a + b + c = 0$. Un polynôme étant nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on obtient immédiatement $b = 0$, puis $a + 2c = 2a + c = 0$, ce qui n'est possible que si $a = c = 0$. La famille est donc bel et bien libre, ce qui prouve que $\text{rg}(\varphi) = 3$, donc que φ est surjective puisqu'on a alors nécessairement $\text{im}(\varphi) = \mathbb{R}_2[X]$. Étant un endomorphisme dans un espace vectoriel de dimension finie, φ est alors injectif, et bijectif.
3. Calculons donc $\varphi^2(P) = \varphi((X^2 + 1)P(1) + P) = (X^2 + 1)(2P(1) + P(1)) + (X^2 + 1)P(1) + P = 4(X^2 + 1)P(1) + P$. On en déduit que $\varphi^2(P) - 4\varphi(P) + 3P = 4(X^2 + 1)P(1) + P - 4(X^2 + 1)P(1) - 4P + 3P = 0$. Bon, ben ça marche. On pouvait aussi poser plus brutalement $P = aX^2 + bX + c$ et tout exprimer en fonction de a , b et c .
4. En reprenant l'égalité démontrée à la question précédente et en arrangeant un peu, on a $3 \text{id} = \varphi \circ (4 \text{id} - \varphi)$, ce qui suffit à prouver que $\varphi^{-1} = \frac{4}{3} \text{id} - \frac{1}{3} \varphi$. On a donc $\varphi^{-1}(P) = \frac{4}{3}P - \frac{1}{3}\varphi(P) = P - \frac{1}{3}(X^2 + 1)P(1)$.
5. Il est temps d'explicitier $\varphi(P)$ en partant de $P = aX^2 + bX + c$: $P(1) = a + b + c$, donc $\varphi(P) = (a + b + c)(X^2 + 1) + aX^2 + bX + c = (2a + b + c)X^2 + bX + a + b + 2c$. Le polynôme P appartient à $\ker(\varphi - \text{id})$ si $\varphi(P) = P$, soit $(2a + b + c)X^2 + bX + a + b + 2c = aX^2 + bX + c$. Par identification, on obtient l'unique équation $a + b + c = 0$ (la deuxième équation est toujours vérifiée, et la troisième est la même que la première), soit $\ker(\varphi - \text{id}) = \{aX^2 + bX - (a + b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(X^2 - 1, X - 1)$. Les plus malins avaient remarqué dès le départ que $P \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow P(1) = 0$, ce qui rend le résultat obtenu à peu près évident. Pour $\ker(\varphi - 3 \text{id})$, on utilise la même méthode : $(2a + b + c)X^2 + bX + a + b + 2c = 3aX^2 + 3bX + 3c$. L'identification du coefficient médian donne immédiatement $b = 0$, et ensuite on a $-a + c = a - c = 0$, soit $a = c$. Autrement dit, $\ker(\varphi - 3 \text{id}) = \{aX^2 + a \mid a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(X^2 + 1)$.
6. La famille étant constituée de trois polynômes, il suffit de montrer qu'elle est libre pour qu'elle soit une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Mais comme on nous demande ensuite les coordonnées de $P = aX^2 + bX + c$ dans cette base, prouvons plutôt qu'elle est génératrice en cherchant à écrire $aX^2 + bX + c = \lambda(X^2 - 1) + \mu(X - 1) + \nu(X^2 + 1) = (\lambda + \nu)X^2 + \mu X + (\nu - \lambda - \mu)$. L'identification donne immédiatement $\mu = b$, puis $\lambda + \nu = a$ et $\nu - \lambda - \mu = c$. Allez, on peut faire une substitution

ici : $\lambda = a - \nu$, donc $2\nu - \mu - a = c$, soit $\nu = \frac{a+b+c}{2}$, puis $\lambda = \frac{a-b-c}{2}$. La famille est donc génératrice, il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$, et les coordonnées de P dans cette base sont $\left(\frac{a-b-c}{2}, b, \frac{a+b+c}{2}\right)$.

7. Le calcul de la question précédente permet immédiatement d'obtenir que $p(P) = \frac{a-b-c}{2}(X^2 - 1) + b(X - 1)$, et $q(P) = \frac{a+b+c}{2}(X^2 + 1)$, donc $p(P) + 3q(P) = \frac{a-b-c}{2}X^2 + bX + \frac{-a-b+c}{2} + \frac{3a+3b+3c}{2}X^2 + \frac{3a+3b+3c}{2} = (2a+b+c)X^2 + bX + (a+b+2c)$, ce qui coïncide exactement avec la formule de $\varphi(P)$.

Exercice 2

- Les applications qui à une matrice associent l'un de ses coefficients sont linéaires par définition de la somme matricielle et du produit d'une matrice par un réel (qui se font terme à terme). La trace est la somme de deux telles applications, elle donc aussi linéaire, et étant à valeurs dans \mathbb{R} , est une forme linéaire.
- Le noyau de la trace, qui est une forme linéaire non nulle, est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc de dimension $4 - 1 = 3$. Le noyau est simplement défini par l'équation $d = -a$, donc $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.
- Calculons donc $f(\lambda A + D) = \text{Tr}(\lambda A + D)B + C(\lambda A + D) = \lambda \text{Tr}(A)B + \text{Tr}(D)B + \lambda CA + CD = \lambda f(A) + f(D)$ en utilisant simplement la linéarité de la trace.
- Calculons donc $f(B) = B + CB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; puis $f(C) = 2B + C^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (non, ces calculs n'ont absolument aucun intérêt).
- Pour plus de légèreté dans la présentation, on assimilera les matrices aux quadruplets de vecteurs (a, b, c, d) , et on notera donc $f(a, b, c, d) = (2a + 2d, 0, a + d, -a - d) + (a - c, b - d, -a + c, -b + d) = (3a + 2d - c, b - d, c + d, -a - b)$. Le noyau de f est donc obtenu en résolvant le système $3a + 2d - c = b - d = c + d = -a - b = 0$. Les trois dernières équations donnent rapidement $d = b$; $c = -d = -b$ et $a = -b$. En reportant dans la première, on trouve alors $-3b + 2b + b = 0$, ce qui est toujours vrai. On en déduit que $\ker(f) = \{(-b, b, -b, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$, ou plus matriciellement $\ker(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$. En particulier, $\dim(\ker(f)) = 1$. Pour l'image, on peut calculer les images des quatre matrices de la base canonique, ce qui donne (toujours présenté sous forme de quadruplets de réels) : $(3, 0, 0, -1)$; $(0, 1, 0, -1)$; $(-1, 0, 1, 0)$ et $(2, -1, 1, 0)$. On sait déjà en appliquant le théorème du rang que la dimension de l'image doit être égale à 3, et on vérifie en effet que le quatrième vecteur est combinaison linéaire des trois autres : $(3, 0, 0, -1) - (0, 1, 0, -1) + (-1, 0, 1, 0) = (2, -1, 1, 0)$. On en déduit que $\text{im}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.
- Puisque la somme de leurs dimensions est égale à 4, il suffit au choix de prouver que leur intersection est nulle, ou que leur somme est $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tout entier. On va plutôt prendre la deuxième option car on a lu l'énoncé de la question suivante. Essayons donc d'écrire $(a, b, c, d) = x(-1, 1, -1, 1) + y(3, 0, 0, -1) + z(0, 1, 0, -1) + t(-1, 0, 1, 0)$. On va procéder par substitution; la deuxième coordonnée donne $x + z = b$, soit $z = b - x$, la troisième donne $-x + t = c$, soit $t = c + x$. La dernière donne ensuite $x - y - z = d$, soit $y = x - z - d = 2x - b - d$, et enfin la première devient $-x + 3y - t = a$, soit $-x + 6x - 3b - 3d - c - x = a$, donc

$4x = a + 3b + c + 3d$, et $x = \frac{a + 3b + c + 3d}{4}$. Ensuite, $y = \frac{a + b + c + d}{2}$; $z = \frac{-a + b - c - 3d}{4}$ et $t = \frac{a + 3b + 5c + 3d}{4}$. La famille est bien génératrice, c'est une base.

7. On l'a déjà fait à la question précédente, les coordonnées sont $\left(\frac{a + 3b + c + 3d}{4}; \frac{a + b + c + d}{2}; \frac{-a + b - c - 3d}{4}; \frac{a + 3b + 5c + 3d}{4}\right)$.
8. Écrivons pour commencer les calculs dans \mathbb{R}^4 : en reprenant les notations précédentes, $s(a, b, c, d) = x(-1, 1, -1, 1) - y(3, 0, 0, -1) - z(0, 1, 0, -1) - t(-1, 0, 1, 0) = (-x - 3y + t, x - z, -x - t, x + y + z) = \left(\frac{-3a - 3b - c - 3d}{2}; \frac{a + b + c + 3d}{2}; \frac{-a - 3b - 3c - 3d}{2}; \frac{a + 3b + c + d}{2}\right)$. Soit $s(A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3a - 3b - c - 3d & a + b + c + 3d \\ -a - 3b - 3c - 3d & a + 3b + c + d \end{pmatrix}$
9. Hum, ça ne va pas être beau, faisons avec des vecteurs encore une fois, et sans fraction : $4s \circ s(a, b, c, d) = (-3(-3a - 3b - c - 3d) - 3(a + b + c + 3d) - (-a - 3b - 3c - 3d) - 3(a + 3b + c + d)); (-3a - 3b - c - 3d) + (a + b + c + 3d) + (-a - 3b - 3c - 3d) + 3(a + 3b + c + d); -(-3a - 3b - c - 3d) - 3(a + b + c + 3d) - 3(-a - 3b - 3c - 3d) - 3(a + 3b + c + d); (-3a - 3b - c - 3d) + 3(a + b + c + 3d) + (-a - 3b - 3c - 3d) + (a + 3b + c + d)) = (4a; 4b; 4c; 4d)$. Eh oui, miracle, on retrouve bien que $s \circ s(a, b, c, d) = (a, b, c, d)$, autrement dit que $s \circ s = \text{id}$, ce qui est normal pour une symétrie.

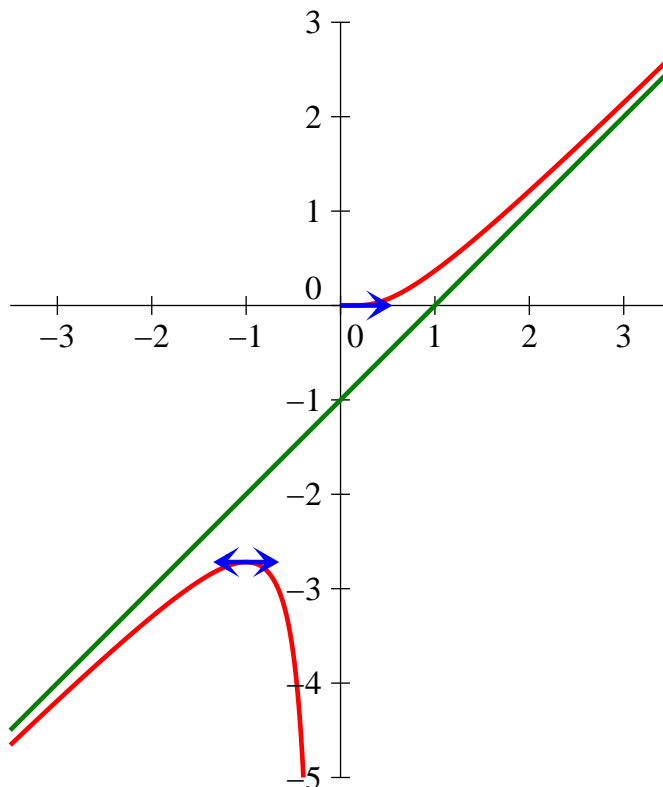
Exercice 3

1. (a) Il n'y a même pas de forme indéterminée : $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{n}{x} = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{n}{x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = 0$, ce qui coïncide avec la valeur imposée pour $f_n(0)$ et prouve donc la continuité à droite de f_n en 0.
- (b) On peut passer directement par le taux d'accroissement : $\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = e^{-\frac{n}{x}}$. D'après les calculs précédents, ce taux d'accroissement tend vers 0 en 0^+ , donc f_n est dérivable à droite en 0, et y admet une demi-tangente horizontale.
2. (a) La fonction f_n est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions usuelles. On calcule $f'_n(x) = e^{-\frac{n}{x}} + \frac{n}{x^2} \times x e^{-\frac{n}{x}} = \left(\frac{x+n}{x}\right) e^{-\frac{n}{x}}$. Sur $]0, +\infty[$, cette dérivée est toujours positive. Elle s'annule pour $x = -n$, est positive également sur $] -\infty, -n[$, et négative sur $[-n, 0[$.
- (b) Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{n}{x}} = 1$, on obtient facilement $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$. En 0^- , il faut invoquer la croissance comparée. Si on veut être très rigoureux, on pose $X = -\frac{n}{x}$, $X \underset{x \rightarrow 0^-}{=} +\infty$, et $f_n(x) = -n \frac{e^X}{X}$, qui a pour limite $-\infty$ par croissance comparée.
3. (a) Rappelons donc que $e^u \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$.
- (b) Puisque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{n}{x}} = 0$, on peut appliquer le développement limité précédent à $u = \frac{-n}{x}$ pour obtenir $e^{-\frac{n}{x}} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} 1 - \frac{n}{x} + \frac{n^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Il ne reste plus qu'à multiplier le tout par x pour trouver le résultat demandé.
- (c) En particulier, $f_n(x) = x - n + o(1)$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = x - n$ est asymptote oblique à la courbe à la fois en $+\infty$ et en $-\infty$. Par ailleurs, le terme suivant du développement est du signe de x , donc la courbe sera située au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$, et en-dessous au voisinage de $-\infty$.

(d) Récapitulons le tableau de variations de la fonction f_1 , en calculant $f_1(-1) = -e^1 = -e$:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
f_1	$-\infty$	$-e$	0	$+\infty$

Sur la courbe, on indique bien entendu la demi-tangente en 0 et l'asymptote :



4. (a) Sur \mathbb{R}^{-*} , la fonction f_n est toujours strictement négative, donc ne peut pas prendre la valeur 1. Sur $[0, +\infty[$, f_n est continue et strictement croissante, et effectue une bijection de \mathbb{R}_+ dans lui-même. En particulier, 1 admet un unique antécédent (strictement positif) par f_n .
- (b) Il suffit pour cela de calculer $f_n(1) = e^{-n} < 1$. La fonction étant strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , $1 < u_n$. Par ailleurs, $u_n e^{-\frac{n}{u_n}} = 1$ implique, en passant au \ln , que $\ln(u_n) - \frac{n}{u_n} = 0$, soit $u_n \ln(u_n) = n$.
- (c) La fonction g est dérivable sur $[1, +\infty[$, de dérivée $g'(x) = \ln(x) + 1 > 0$, elle est donc strictement croissante et bijective. Comme $g(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, la fonction g est bijective de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. La fonction g^{-1} est donc définie et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , et vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} g^{-1}(x) = +\infty$. Comme $u_n = g^{-1}(n)$ (c'est une conséquence immédiate des résultats de la question précédente), on peut en effet en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- (d) On sait déjà que $u_n \ln(u_n) = n$, et les deux membres étant supérieurs ou égaux à 1, on peut prendre le \ln des deux côtés pour obtenir $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$. Or, en posant $X = \ln(u_n)$, qui tend vers $+\infty$, on peut affirmer en utilisant la croissance comparée

que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$, c'est-à-dire que $\ln(\ln(u_n)) = o(\ln(u_n))$. On en déduit que $\ln(n) = \ln(n) + \ln(\ln(n)) \sim \ln(u_n)$. Attention à ne pas en déduire que u_n est équivalente à n , ce serait faux ! Reprenons plutôt l'égalité $u_n \ln(u_n) = n$. en appliquant l'équivalent qu'on vient d'obtenir, $u_n = \frac{n}{\ln(u_n)} \sim \frac{n}{\ln(n)}$.

5. (a) C'est une conséquence directe du fait que $u_n = g^{-1}(n)$ et que la fonction g^{-1} a le même sens de variations que g , donc est croissante.
- (b) Par définition, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$, c'est-à-dire que $u_{n+1} = e^{\frac{n+1}{u_{n+1}}}$. On peut alors calculer $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} e^{-\frac{n}{u_{n+1}}} = e^{\frac{n+1}{u_{n+1}} - \frac{n}{u_{n+1}}} = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.
- (c) La fonction f_n est croissante sur $[u_n, u_{n+1}]$, minorée par $f_n(u_n) = 1$ et majorée par $f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$, on peut donc encadrer I_n en écrivant $\int_{u_n}^{u_{n+1}} 1 dt \leq \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t) dt \leq \int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{\frac{1}{u_{n+1}}} dt$. Autrement dit, $u_{n+1} - u_n \leq I_n \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}}(u_{n+1} - u_n)$. Comme $u_{n+1} - u_n > 0$, on divise pour obtenir l'encadrement souhaité.
- (d) Le membre de droite de l'encadrement précédent a pour limite 1 quand n tend vers $+\infty$ puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{n+1}} = 0$. En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} = 1$, soit $I_n \sim u_{n+1} - u_n$.