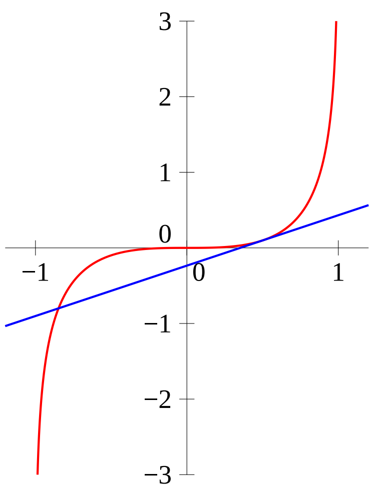
TD n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

19 mars 2015

Exercice 1

1. La fonction g est définie si $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$, soit $\mathcal{D}_g =]-1;1[$ (tableau de signes si vous n'êtes pas convaincus).
2. Le domaine de définition de g est symétrique par rapport à 0, et $g(-x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x} + 2x = -\ln \dfrac{1+x}{1-x} + 2x = -g(x)$, donc la fonction est impaire.
3. La fonction g est dérivable et, en écrivant $g(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x$ (toujours valable sur son domaine de définition), $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x} - 2 = \dfrac{2}{(1+x)(1-x)} - 2 = \dfrac{2-2+2x^2}{1-x^2} = \dfrac{2x^2}{1-x^2}$.
4. Calculons $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} - 2 \times \dfrac{1}{2} = \ln 3 - 1$, et $g'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2 \times \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{2}{3}$, donc l'équation de la tangente T est $y = \dfrac{2}{3}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + \ln 3 - 1 = \dfrac{2}{3}x + \ln 3 - \dfrac{4}{3}$.
5. La fonction g' est strictement positive sur $\mathcal{D}_g$, donc g y est strictement croissante. De plus, $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1+x}{1-x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$. Par imparité de g, $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = -\infty$.
6. Calculons $g''(x) = \dfrac{2x(1-x^2) + 2x(x^2)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$. La fonction g est donc concave sur $]-1;0]$ et convexe sur $[0;1[$.
7. La fonction g' est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ d'après la question précédente, et $g'(0) = 0$ et $g'\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{3}$, d'où l'encadrement demandé.
8. Voilà la courbe demandée :



9. (a) La fonction g est croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, et $g(0)=0$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 3-1<\frac{1}{2}$, donc l'intervalle est effectivement stable par g. On prouve ensuite par récurrence que $u_n\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$. En effet, u_0 appartient à l'intervalle par hypothèse, et si u_n est dans l'intervalle, $g(u_n)=u_{n+1}$ aussi par stabilité de l'intervalle.

   (b) Toutes les hypothèses sont réunies pour appliquer l'inégalité des accroissements finis sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ à $y=u_n$ et $z=0$ (qui est bien un point fixe de g). On obtient alors $|u_{n+1}|\leq\frac{2}{3}|u_n|$. On effectue ensuite une nouvelle récurrence pour prouver que $|u_n|\leq\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. C'est vrai pour u_0 puisque $u_0=\frac{1}{2}$, et si on suppose l'hypothèse vérifiée pour u_n, on a $|u_{n+1}|\leq\frac{2}{3}|u_n|\leq\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, ce qui prouve l'hérédité.

   (c) Comme $\frac{2}{3}\in[-1;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0$, ce qui prouve que la suite (u_n) tend vers 0.

Exercice 2

1. On a donc $P_0=X^2+X+1$, qui admet pour discriminant $\Delta=1-4=-3$, le polynôme est donc irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Il admet deux racines complexes $z_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$, et $z_2=\bar{z_1}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. On peut bien sûr factoriser sous la forme $P_0=(X-z_1)(X-z_2)$.
   Ensuite, $P_1=X^4+X^2+1$. Quitte à poser $Y=X^2$, on se ramène à la même équation que précédemment, et les racines de P_1 sont donc les racines carrées de celles de P_0, c'est-à-dire $z_3=e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_4=e^{i\frac{-2\pi}{3}}$, $z_5=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_6=e^{i\frac{2\pi}{3}}$. La factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ donne donc $P_1=(X-z_3)(X-z_4)(X-z_5)(X-z_6)$. On regroupe les conjugués pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$: $P_1=(X^2-X+1)(X^2+X+1)$.
   On continue : $P_2=X^8+X^4+1$. On peut encore se ramer au cas précédent, ou utiliser des méthodes plus brutales. Je ne détaille pas, le polynôme a déjà été traité dans la question 3 de l'exercice 3 de la feuille 12.
2. (a) Il est évident que E est un sous-espace vectoriel puisqu'il est défini comme en étant un ! De plus, les deux polynômes P_0 et P_1 sont de degré plus petit que 4, donc E est bien inclus dans $\mathbb{R}_4[X]$, et nos deux polynômes n'étant pas proportionnels, ils forment une base de E, qui est de dimension 2.

   (b) Essayons d'écrire $Q_1=aP_1+bP_0=aX^4+(a+b)X^2+bX+a+b$. Par identification, on obtient les conditions $a=2$, $a+b=1$, $b=-1$ et $a+b=3$, qui sont manifestement impossibles à réaliser. Le polynôme Q_1 n'appartient donc pas à E. Pour Q_2, on a de même les conditions $a=1$, $a+b=-2$, $b=-3$ et $a+b=-2$. Cette fois-ci, on a la solution $a=1$ et $b=-3$, et on en déduit que $Q_2=P_1-3P_0$.
3. Calculons donc $(X^{2^{n+1}}+X^{2^n}+1)(X^{2^{n+1}}-X^{2^n}+1)=(X^{2^{n+1}}+1)^2-(X^{2^n})^2=X^{2^{n+2}}+2X^{2^{n+1}}+1-X^{2^{n+1}}=P_{n+1}$.
4. On calcule facilement les racines n-èmes de j sous forme exponentielle : le module doit être égal à 1, et l'argument égal à $\frac{\pi}{3.2^{n-1}}\left[\frac{\pi}{2^n}\right]$. C'est pareil pour $\bar{j}$, mais avec un $-$ dans l'argument, on se contente de prendre les conjugués.
5. On peut donc écrire $P_n=\prod\limits_{k=0}^{2^n-1}(X-e^{i(\frac{\pi}{3.2^{n-1}}+\frac{k\pi}{2^n})})\times(X-e^{-i(\frac{\pi}{3.2^{n-1}}+\frac{k\pi}{2^n})})$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on

regroupe les conjugués : $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{2^n-1} \left(X - 2\cos\left(\frac{\pi}{3.2^{n-1}} + \frac{k\pi}{2^n}\right) + 1 \right)$

6. En appliquant les relations coefficients-racines, la somme des racines de P_n est nulle, sauf lorsque $n = 0$ où elle vaut -1 ; et le produit vaut 1 (le degré de P_n est toujours pair).

Problème

Partie I

1. La fonction f est définie sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$.
2. Puisque $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, et on peut prolonger f par continuité en posant $f(0) = 1$.
3. Calculons donc la dérivée (ailleurs qu'en 0) : $f'(x) = \dfrac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{x - (1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^2}$. Bon, il n'y aucun moyen évident de calculer la limite de cette dérivée en 0 (même problème si on passe directement par le taux d'accroissement). En fait, vous manquez un peu de développements limités pour faire cette question facilement, même si on peut s'en sortir avec le règle de l'Hôpital (mais si !). Notre numérateur (celui de la dérivée) a pour dérivée $1 - \dfrac{1+x}{1+x} - \ln(1+x) = -\ln(1+x)$, et notre dénominateur a pour dérivée $2x + 3x^2 = x(2+3x)$. Or, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{-\ln(1+x)}{x(2+3x)} = -\frac{1}{2}$ (on utilise la même limite classique que pour f), qui est donc aussi la limite de $f'(x)$ quand x tend vers 0. D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, la fonction f est donc dérivable en 0, et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
4. Commençons donc par étudier la fonction k : elle est définie et dérivable sur le même intervalle que f (y compris en 0), et $k'(x) = 1 - \ln(1+x) - \dfrac{1+x}{1+x} = -\ln(1+x)$. La fonction k est donc croissante sur $]-1,0]$ et décroissante sur $[0,+\infty[$. Comme $k(0) = 0$, la fonction est toujours négative, et f' est donc du signe opposé à celui de $(1+x)x^2$, c'est-à-dire toujours négative. On calcule sans difficulté $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée), et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ (croissance comparée), pour obtenir le tableau de variations suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

Partie II

1. Puisqu'on a prolongé la fonction par continuité en 0, il s'agit de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue, elle est évidemment définie.
2. Il s'agit de reconnaitre une somme partielle de suite géométrique de raison $-t$, la formule en découle trivialement.
3. On constate facilement que P_n est la primitive s'annulant en 0 de $1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1}$ (dérivez P_n si vous n'êtes vraiment pas convaincus), donc en réutilisant le résultat de la question précédente, $P_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-(-1)^n t^n}{1+t}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} + \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt = \ln(1+x) + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt$ (que de questions triviales dans ce sujet, ça fatiguerait presque).

4. Lorsque $t \in [0,1]$, $\dfrac{1}{1+t} \leq 1$, donc $|R_n(x)| = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
5. Calculons donc $Q_n'(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{X^{n-1}}{n}$. Incroyable mais vrai c'est exactement $\dfrac{P_n(x)}{x}$.
6. D'après la question précédente, $\displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \int_0^1 Q_n'(x)\,dx - L = Q_n(1) - Q_n(0) - L$. Comme Q_n s'annule en 0, l'inégalité $|Q_n(1) - L| = \left|\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 |g_n(x)|\,dx$ en découle. Par ailleurs, d'après la question précédant la précédente, $|g_n(x)| = \dfrac{|P_n(x) - \ln(1+x)|}{|x|} = \dfrac{|R_n(x)|}{x} \leq \dfrac{x^n}{n+1}$, donc $\displaystyle\int_0^1 |g_n(x)|\,dx \leq \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{(n+1)^2}$. On en déduit immédiatement que $\lim\limits_{n\to+\infty} |Q_n(1) - L| = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(1) = L$.
7. Vu l'inégalité obtenue à la question précédente, ce sera le cas dès que $\dfrac{1}{(n+1)^2} \leq 10^{-4}$, soit $n + 1 \geq 10^2$, donc $n \geq 99$.

Partie III

1. C'est trivial, puisqu'il s'agit d'un quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. On connait déjà la valeur de $f'(x) = \dfrac{x - (1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^2} = \dfrac{1}{x(1+x)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$, calculons $f''(x) = -\dfrac{1+2x}{x^2(1+x)^2} - \dfrac{\frac{x^2}{1+x} - 2x\ln(1+x)}{x^4} = \dfrac{-1-2x}{x^2(1+x)^2} - \dfrac{1}{(1+x)x^2} + 2\dfrac{\ln(1+x)}{x^3}$.
3. Nous allons évidemment procéder par récurrence. C'est vrai au rang 1 et même au rang 2 d'après la question précédente (il suffit de mettre au même dénominateur les deux premiers termes obtenus pour f'', si on le suppose au rang n, alors
$f^{(n+1)}(x) = \dfrac{T_n'(x)(1+x)^n x^n - nT_n(x)(1+x)^{n-1}x^n - nT_n(x)(1+x)^n x^{n-1}}{(1+x)^{2n}x^{2n}}$
$+ a_n \dfrac{\frac{x^{n+1}}{1+x} - (n+1)x^n \ln(1+x)}{x^{2n+2}} = \dfrac{T_n'(x)x(1+x) - nT_n(x)(2x+1) + a_n(1+x)^n}{(1+x)^{n+1}x^{n+1}} - (n+1)a_n\dfrac{\ln(1+x)}{x^{n+2}}$,
qui est bien de la forme souhaitée. Précisons au passage que le réel a_n est en fait toujours un entier (qu'on peut même expliciter facilement), ça va servir juste après.
4. C'est une récurrence triviale : ça marche au rang 1, et si on le suppose au rang n, alors $T_{n+1} = x(1+x)T_n' - n(1+2x)T_n + a_n(1+x)^n$ a tous ses coefficients entiers puisque chacun des termes qui le constitue est à coefficients entiers.
5. Tentons donc d'appliquer Leibniz avec $u(x) = \ln(1+x)$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$. On obtient sans peine $u^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ (pour $k \geq 1$) et $h^{(k)}(x) = (-1)^k \dfrac{k!}{x^{k+1}}$. On obtient alors $f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) = \frac{(-1)^n n! \ln(1+x)}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}(-1)^{n-k}\frac{(n-k)!}{x^{n-k+1}}$ en isolant le terme correspondant à $k = 0$. La somme se simplifie en $(-1)^{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{n!(1+x)^{n-k}x^{k-1}}{k(1+x)^n x^n}$, ce qui donne par identification $T_n(x) = (-1)^{n-1} n! \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{(1+x)^{n-k}x^{k-1}}{k}$. Pour $n = 2$, on trouve $T_2(x) = -2\left(1 + x + \dfrac{x}{2}\right) = -2 - 3x$, qui correspond bien à la dérivée seconde obtenue plus haut.