TD n°7 : révisions pour le DS6

PTSI B Lycée Eiffel

19 mars 2015

Exercice 1

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x$.

1. Déterminer le domaine de définition de g.
2. Montrer que g est impaire.
3. Démontrer que g est dérivable sur son domaine de définition et que $g'(x) = 2\frac{x^2}{1-x^2}$.
4. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative de g en son point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
5. Dresser le tableau de variation de g en précisant ses limites aux bornes de son domaine de définition.
6. Calculer g'' et étudier la convexité de g.
7. Montrer que, $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $0 \leq g'(x) \leq \frac{2}{3}$.
8. Tracer une courbe représentative soignée de g, ainsi que de la tangente T (on donne $\ln 3 \simeq 1.1$).
9. On définit une suite (u_n) par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
   (a) Montrer que l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ est stable par g, et en déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.
   (b) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|u_n|$, puis en déduire que $|u_n| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 2

On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^{2^{n+1}} + X^{2^n} + 1$.

1. Calculer P_0, P_1 et P_2, et donner leur factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
2. On note $E = \text{Vect}(P_0, P_1)$.
   (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$, et donner sa dimension.
   (b) Déterminer pour chacun des deux polynomes suivants s'il appartient à E, et l'écrire comme combinaison linéaire de P_0 et de P_1 si c'est le cas : $Q_1 = 2X^4 + X^2 - X + 3$, et $Q_2 = X^4 - 2X^2 - 3X - 2$.
3. Démontrer que $P_{n+1} = P_n \times (X^{2^{n+1}} - X^{2^n} + 1)$.
4. En notant $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^{2^n} = j$ et $z^{2^n} = \bar{j}$.
5. En déduire la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ de P_n.
6. Calculer la somme et le produit des racines de P_n.

Problème

Partie I

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f admet en 0 un prolongement par continuité que l'on continuera à noter f.
3. La fonction prolongée est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser $f'(0)$. Calculer par ailleurs la dérivée f' de la fonction f.
4. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations. On pourra utiliser la fonction auxiliaire $k : x \mapsto x - (1+x)\ln(1+x)$.

Partie II

On s'intéresse dans cette partie à l'intégrale $L = \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$.

Pour tout entier naturel n, on note $P_n(X) = X - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{X^n}{n}$, et $Q_n(X) = X - \dfrac{X^2}{4} + \dfrac{X^3}{9} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{X^n}{n^2}$.

1. Expliquer pourquoi l'intégrale L est bien définie.
2. Justifier que $\forall t \in [0;1]$, $1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \dfrac{1-(-1)^n t^n}{1+t}$.
3. En déduire que $\forall x \in [0;1]$, $P_n(x) = \ln(1+x) - \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\ dt$.

   On notera désormais, pour $x \in [0;1]$, $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\ dt$.
4. Établir la majoration $|R_n(x)| \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.
5. Comparer, pour $x \in]0;1]$, $Q_n'(x)$ et $\dfrac{P_n(x)}{x}$.
6. En notant g_n l'application définie sur $]0;1]$ par $g_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, et par $g_n(0) = 0$, montrer que $|Q_n(1) - L| \leq \displaystyle\int_0^1 |g_n(x)|\ dx \leq \frac{1}{(n+1)^2}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} Q_n(1)$.
7. Déterminer un entier N tel que $Q_N(1)$ soit une approximation de L à 10^{-4} près.

Partie III

On s'intéresse à présent aux dérivées successives de f, que l'on note $f^{(n)}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$.
2. Calculer $f''(x)$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe un polynôme T_n à coefficients réels, et un réel a_n, tels que $f^{(n)}(x) = \dfrac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n \dfrac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}$.
4. Montrer que tous les coefficients de T_n sont des entiers.
5. En utilisant la formule de Leibniz, calculer $f^{(n)}(x)$ et en déduire la valeur de T_n sans chercher à expliciter ses coefficients. Vérifier cette expression pour $n = 2$.