TD n°5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

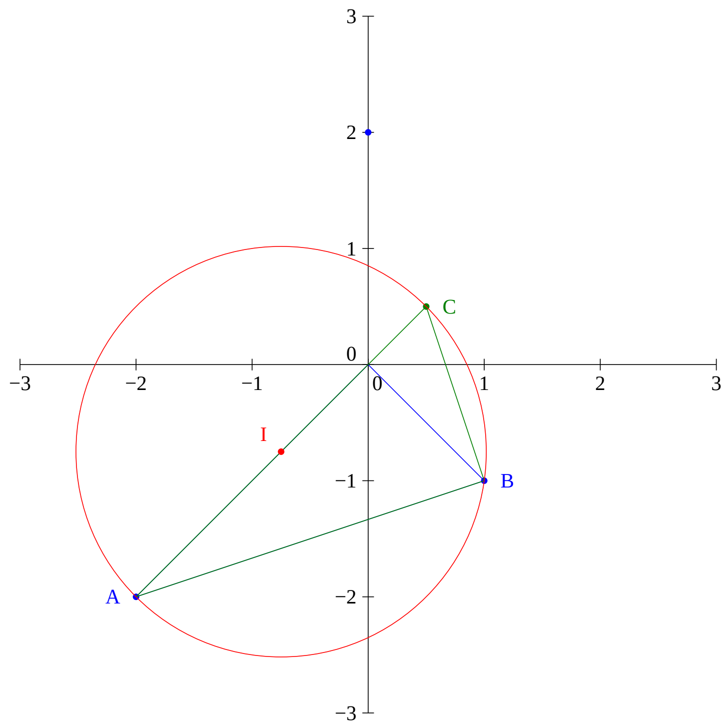
8 janvier 2015

Exercice 1

1. (a) Posons $z = bi$, alors $z^2 = -b^2$ et $z^3 = -b^3 i$, donc $z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = -b^3 i - b^2 - b^2 i + 2bi + 2b + 8i$. En séparant partie réelle et partie imaginaire, z est donc solution de notre équation si $-b^2 + 2b = 0$, et $-b^3 - b^2 + 2b + 8 = 0$. La première condition donne $b = 0$ ou $b = 2$, la deuxième équation ne s'annule pas pour $b = 0$ mais s'annule pour $b = 2$ puisque $-8 - 4 + 4 + 8 = 0$, donc $z = 2i$ est solution imaginaire pure de notre équation.

   (b) On peut donc factoriser le membre de gauche de l'équation sous la forme $(z-2i)(az^2+bz+c) = az^3+(b-2ai)z^2+(c-2bi)z-2ci$. Par identification, on doit avoir $a = 1$; $b-2ai = 1+i$, donc $b = 1+3i$; $c-2bi = 2-2i$, donc $c = -4$. Reste à résoudre l'équation du second degré $z^2+(1+3i)z-4 = 0$. Elle a pour discriminant $\Delta = (1+3i)^2+16 = 8+6i$. On cherche $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Comme $\delta^2 = a^2-b^2+2abi$, on trouve les deux conditions $a^2-b^2 = 8$ et $2ab = 6$. On ajoute l'équation aux modules $|\delta|^2 = a^2+b^2 = |\Delta| = \sqrt{64+36} = 10$. En ajoutant et soustrayant la première et la dernière équations obtenues, on trouve $2a^2 = 18$ et $2b^2 = 2$, soit $a = \pm 3$ et $b = \pm 1$. Comme ab est positif, a et b doivent être de même signe et on peut prendre $\delta = 3+i$. On en déduit les solutions de notre équation du second degré : $z_1 = \dfrac{-1-3i+3+i}{2} = 1-i$ et $z_2 = \dfrac{-1-3-3-i}{2} = -2-2i$. Les solutions de l'équation initiale sont donc données par $\mathcal{S} = 2i, 1-i, -2-2i$.

   (c)



2. Par un calcul de distances, on va utiliser ce bon vieux théorème de Pythagore (ou plutôt sa réciproque, en l'occurence). On calcule donc $OA = |-2-2i| = \sqrt{8}$, $OB = |1-i| = \sqrt{2}$, et $AB = |1-i-(-2-2i)| = |3+i| = \sqrt{10}$. Constatant aisément que $OA^2 + OB^2 = 10 = AB^2$, on en déduit que OAB est rectangle en O. Autre possiblité, calculer des arguments : comme $z_A = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$, on a $\arg(z_A) = -\frac{3\pi}{4}$. De même, $z_B = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$, donc $\arg(z_B) = -\frac{\pi}{4}$. On en déduit que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, ce qui prouve que le triangle OAB est rectangle en O.
3. (a) On a en fait déjà effectué les calculs nécessaires à la question précédente. La similitude f vérifie $f(O) = O$ et $f(A) = B$, donc son rapport est $\frac{OB}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$. Son angle est l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg(z_B) - \arg(z_A) = \frac{\pi}{2}$. L'application f est donc la composée de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et de l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$. si on veut en donner une expression analytique, on a donc $f(z) = \frac{1}{2}iz$ (qu'on peut aussi obtenir par la résolution d'un système).

   (b) Un calcul idiot suffit : $f \circ f(z) = -\frac{1}{4}z$, donc $f \circ f$ est simplement l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{4}$.

   (c) D'après la question précédente, $z_C = -\frac{1}{4}z_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. On peut alors calculer par exemple $\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i}{3+i} = \frac{1}{2}\frac{i(3+i)}{3+i} = -\frac{i}{2}$. Ce nombre étant imaginaire pur, on en déduit que le triangle ABC est rectangle en B.
4. (a) Donnons par exemple une équation cartésienne : $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{8}$, soit $x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} + y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} = \frac{50}{16}$, soit $x^2 + \frac{3}{2}x + y^2 + \frac{3}{2}y - 2 = 0$.

   (b) Vérifions donc que leurs coordonnées vérifient l'équation : $(-2)^2 + \frac{3}{2} \times (-2) + (-2)^2 + \frac{3}{2} \times (-2) - 2 = 4 - 3 + 4 - 3 - 2 = 0$, c'est bon pour A ; $1 + \frac{3}{2} + 1 - \frac{3}{2} - 2 = 0$, c'est bon pour B ; $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2 = 0$, c'est bon également pour C.

   (c) Il suffit de constater que $z_I = \frac{z_A + z_C}{2}$ pour en déduire que I est le milieu de $[AC]$. Or, dans le triangle rectangle ABC, le milieu I de l'hypothénuse est également le centre du cercle circonscrit au triangle. Il est donc tout à fait normal que les trois points A, B et C soient situés à égale distance du point I, et un seul calcul de distance au lieu de trois aurait pu suffire.

Exercice 2

1. Calculons donc $v_0 = \frac{7}{3}$; $u_1 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{7}{3}\right) = \frac{8}{3}$; $v_1 = \frac{21}{8}$; $u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} + \frac{21}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{24} + \frac{63}{24}\right) = \frac{127}{48}$; et $v_2 = \frac{336}{127}$.
2. C'est une récurrence triviale : en notant P_n : u_n et v_n sont strictement positifs, P_0 est vraie, et P_n implique clairement P_{n+1} pusique la moyenne de deux nombres strictement positifs est strictement positive, et l'inverse d'un nombre strictement positif l'est également.

3. Puisque $v_n = \dfrac{7}{u_n}$, $(u_n+v_n)^2 = \left(u_n + \dfrac{7}{u_n}\right)^2 = u_n^2+14+\dfrac{49}{u_n^2}$. De même, $(u_n-v_n)^2 = u_n^2-14+\dfrac{49}{u_n^2}$, donc $(u_n+v_n)^2-(u_n-v_n)^2 = 14+14 = 28$, donc découle la première égalité. En divisant cette relation par $4u_{n+1} = 2(u_n+v_n)$, on trouve alors $\dfrac{1}{4u_{n+1}}(u_n-v_n)^2 = \dfrac{(u_n+v_n)^2}{2(u_n+v_n)} - \dfrac{28}{2(u_n+v_n)} = \dfrac{u_n+v_n}{2} - \dfrac{7}{\frac{u_n+v_n}{2}} = u_{n+1}-v_{n+1}$. L'expression $\dfrac{1}{4u_{n+1}}(u_n-v_n)^2$ étant positive (puisque $u_{n+1} > 0$), on en déduit bien que $u_{n+1} \geq v_{n+1}$, ce qui prouve que $u_n \geq v_n$ à partir du rang 1. C'est également vrai au rang 0 car $\dfrac{7}{3} < 3$, donc $u_n \geq v_n$ pour tout entier naturel n.

4. Comme $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n+v_n}{2} - u_n = \dfrac{v_n-u_n}{2} \leq 0$ d'après la question précédente, (u_n) est décroissante. On peut en déduire immédiatement que $v_n = \dfrac{7}{u_n}$ est le terme général d'une suite croissante (on peut aussi refaire un calcul).

5. (a) On a vu plus haut que $v_1 = \dfrac{21}{8}$. Or, d'après les résultats des questions précédentes, $\forall n \geq 1$, $u_n \geq v_n \geq v_1$, donc $u_n \geq \dfrac{21}{8}$.

   (b) On reprend simplement le résultat de la question 3 : $u_{n+1} \geq \dfrac{21}{8}$, donc $\dfrac{1}{4u_{n+1}} \leq \dfrac{8}{84} \leq \dfrac{1}{10}$.

   (c) Puisqu'on nous le suggère si gentiment, prouvons par récurrence la propriété $P_n : u_n - v_n \leq \dfrac{1}{10^{2^n-1}}$. Au rang 0, $\dfrac{1}{10^{2^0-1}} = \dfrac{1}{10^0} = 1$, et $u_0 - v_0 = 3 - \dfrac{7}{3} = \dfrac{2}{3} \leq 1$, donc P_0 est vérifiée. Supposons P_n vraie et exploitons la question précédénte : $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{1}{10}(u_n-v_n)^2 \leq \dfrac{1}{10} \times \left(\dfrac{1}{10^{2^n-1}}\right)^2 = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{10^{2^{n+1}-2}} = \dfrac{1}{10^{2^{n+1}-1}}$. On a exactement prouvé P_{n+1} la propriété est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n.

6. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{10^{2^n-1}} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$ (la suite étant positive puisque $u_n \geq v_n$). Comme de plus (u_n) est décroissante et (v_n) croissante, les deux suites sont bien adjacentes, et convergent donc vers une limite commune l. La relation $v_n = \dfrac{7}{u_n}$ permet, par passage à la limite, d'obtenir $l = \dfrac{7}{l}$, soit $l^2 = 7$ et $l = \sqrt{7}$ (les suites étant à termes strictement positifs, leur limite ne peut pas être négative).

7. On aura toujours $v_n \leq l \leq u_n$, donc u_n (ou v_n) est toujours une valeur approchée de $\sqrt{7}$ avec une erreur majorée par $u_n - v_n$, qui est elle-même majorée par $\dfrac{1}{10^{2^n-1}}$. Il suffit de prendre $n = 2$ pour obtenir $\dfrac{1}{10^{2^n-1}} = 10^{-3}$, donc $\sqrt{7} \simeq u_2 \simeq \dfrac{127}{48}$ à 10^{-3} près (par excès).

Exercice 3

1. On calcule (a priori sans difficulté) $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Les -2 en-dehors de la diagonale forcent à prendre $\alpha = 2$. Comme $2A$ est une matrice ayant une diagonale de 4, il faut alors prendre $\beta = 3$ pour que les élémentes de la diagonale de $\alpha A + \beta I$ soient égaux à 7. On vérifie qu'en effet $A^2 = 2A + 3I$.

3. Notons donc $P_n : A^n = \alpha_n A + \beta_n I$. La propriété P_0 est vraie, en posant $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 1$. Même si ça ne sert à rien pour la récurrence, notons que P_1 est aussi vraie en prenant $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 0$. Supposons désormais P_n vraie pour un certain entier n. On peut alors écrire $A^{n+1} =$

$A \times A^n = A(\alpha_n A + \beta_n I) = \alpha_n A^2 + \beta_n A$. Ne reste plus qu'à utiliser la relation de la question précédente : $A^{n+1} = \alpha_n(2A+3I) + \beta_n A = (2\alpha_n + \beta_n)A + 3\alpha_n I$. La propriété P_{n+1} est donc vérifiée, avec $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + \beta_n$ et $\beta_{n+1} = 3\alpha_n$.

4. En effet, d'après les relations précédentes, $\alpha_{n+2} = 2\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} = 2\alpha_{n+1} + 3\alpha_n$. On reconnait bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 2x - 3 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 4 + 12 = 16$, et qui admet deux racines $r_1 = \frac{2+4}{2} = 3$ et $r_2 = \frac{2-4}{2} = -1$. Il existe donc deux réels a et b tels que $\alpha_n = a3^n + b(-1)^n$. À l'aide des deux premiers termes de la suite, on a $\alpha_0 = 0 = a + b$ et $\alpha_1 = 1 = 3a - b$, donc $b = -a$ et $4a = 1$, soit $a = \frac{1}{4}$ et $b = -\frac{1}{4}$. Finalement, $\alpha_n = \frac{3^n - (-1)^n}{4}$.
5. Comme $\beta_{n+1} = 3\alpha_n$, on aura, pour $n \geq 1$, $\beta_n = 3\alpha_{n-1} = \frac{3^n + 3(-1)^n}{4}$. On constate que cette formule reste vraie pour $n = 0$, elle est donc valable pour tout entier n. Finalement, on obtient $A^n = \frac{3^n(A+I) + (-1)^n(3I - A)}{4}$ (on peut donner les coefficients si on le souhaite...).
6. On calcule sans difficulté $B^2 = -4B$ (matrice ne contenant que des coefficients égaux à -4), puis $B^3 = 16B$, et cela devrait suffire à conjecturer que $B^n = (-4)^{n-1}B$. Notons donc P_n cette proposition. La propriété P_1 est vraie (ça ne marche évidemment pas pour B^0) puisque $(-4)^0 B = B$. En supposant P_n vraie, on a alors $B^{n+1} = B \times B^n = B \times (-4)^{n-1}B = (-4)^{n-1}B^2 = (-4)^{n-1} \times (-4B) = (-4)^n B$, ce qui prouve P_n et achève la récurrence.
7. On peut remarquer que $A = B + 3I$, les matrices B et $3I$ commutant, on peut en effet appliquer votre formule préférée (ne niez pas, je sais que vous adorez tous ce cher Newton) : $A^n = (B+3I)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} B^k (3I)^{n-k}$. On isolera le terme numéro 0, pour lequel $B^k = I$, pour les autres on utilise la formule de la question précédente.

   $A^n = 3^n I + \sum_{k=1}^{k=n} (-4)^{k-1} B 3^{n-k} I = 3^n I + (\sum_{k=1}^{k=n} (-4)^{k-1} 3^{n-k})B = 3^n I - \frac{1}{4}(\sum_{k=1}^{k=n} (-4)^k 3^{n-k})B = 3^n I - \frac{1}{4}((\sum_{k=0}^{k=n} (-4)^k 3^{n-k})B - 3^n B) = 3^n I + \frac{3^n}{4}B - \frac{(-1)^n}{4}B$.

   Comme $B = A - 3I$, on peut réécrire ce résultat sous la forme $A^n = 3^n I + \frac{3^n}{4}A - \frac{3^{n+1}}{4}I - \frac{(-1)^n}{4}A + \frac{3(-1)^n}{4}I = \frac{3^n(4I + A - 3I) + (-1)^n(-A + 3I)}{4} = \frac{3^n(A+I) + (-1)^n(3I - A)}{4}$. On retrouve la même formule que précédemment (encore heureux).

Problème

I.Cas d'une suite (a_n) constante.

1. On a $b_0 = \sqrt{1} = 1$, puis $b_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, et $b_2 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$. Le fait que $b_0 < b_1$ est clair. Pour comparer b_1 et b_2 qui sont tous les deux positifs, le plus simples est de les élever au carré : $b_1^2 = 2$, et $b_2^2 = 1 + \sqrt{2} > 2$ puisque $\sqrt{2} > 1$. On a bien $b_2 > b_1$.
2. La fonction f est définie sur $[-1; +\infty[$, elle est la composée de deux fonctions strictement croissantes sur leur domaine de définition, donc croissante. De plus, $f(-1) = 0$, et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. L'équation $f(x) = x$ se résout en passant tout au carré : $1 + x = x^2$ donne $x^2 - x - 1 = 0$, équation qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, et admet deux racines $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Mais cette deuxième valeur est négative et ne peut donc être solution de

l'équation $\sqrt{1+x} = x$ (le membre de droite est négatif, et celui de gauche positif). Seule x_1 est donc solution de l'équation. Pour le signe de $\sqrt{1+x} - x$, il est évidemment positif quand $x < 0$. Si $x \geq 0$, $\sqrt{1+x} \geq x$ équivaut à $1 + x \geq x^2$, donc à $x^2 - x - 1 \leq 0$, ce qui sera le cas pour $x \leq x_1$ au vu du calcul précédent. On a donc $f(x) - x \geq 0$ si $x \in [1; x_1]$, et $f(x) - x \leq 0$ sur $[x_1; +\infty[$.

3. Faisons une petite récurrence. La propriété est évidemment vraie pour $n = 0$, puisque $1 \in \left[1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Supposons-là vérifiée au rang n, alors, la fonction f étant croissante, on aura $f(1) \leq f(b_n) \leq f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Or, $b_{n+1} = \sqrt{1+b_n} = f(b_n)$; $f(1) = \sqrt{2} > 1$, et $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On en déduit l'encadrement voulu pour b_{n+1}, ce qui achève la récurrence. Comme on a vu plus haut que, sur cet intervalle, on avait toujours $f(x) - x \geq 0$, on aura donc toujours $f(b_n) - b_n \geq 0$, soit $b_{n+1} - b_n \geq 0$, ce qui prouve la croissance de la suite (b_n).
4. La suite étant croissante majorée, elle converge certainement vers une limite l. Mais en passant à la limite la relation de récurrence définissant (b_n), on aura nécessairement $l = \sqrt{1+l}$, soit $l = f(l)$. Cette équation a été résolue plus haut, on a donc $\lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
5. Suivant les indications de l'énoncé, $l - \sqrt{1+x} = \frac{l^2 - 1 - x}{l + \sqrt{1+x}}$. Or, $l^2 = 1 + l$, donc $l - \sqrt{1+x} = \frac{l - x}{\sqrt{1+x} + l}$. Comme $\sqrt{1+x} \geq 1$ (on a supposé $x \geq 0$) et $l \geq 1$, on a donc $l - \sqrt{1+x} \leq \frac{l-x}{2}$.
6. La première inégalité est une simple application du résultat précédent avec $x = b_n$. La deuxième moitié se prouve par récurrence. Pour $n = 0$, on a $l - b_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq \frac{3-1}{2} = 1$, donc $l - b_0 \leq \frac{1}{2^0}$. Supposons désormais que $l - b_n \leq \frac{1}{2^n}$, alors d'après la question précédente $l - b_{n+1} \leq \frac{1}{2}(l - b_n) \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$ et, par principe de récurrence, pour tout entier n.
7. Il suffit d'avoir $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$, soit $2^n \geq 1000$. Cela se produit dès que $n = 10$.

II.Cas d'une suite périodique.

1. Calculons donc $b_0 = \sqrt{a_0} = 0$; $b_1 = \sqrt{a_1 + b_0} = \sqrt{1} = 1$; $b_2 = \sqrt{a_2 + b_1} = \sqrt{1} = 1$; $b_3 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $b_4 = \sqrt{0 + \sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{4}}$. La suite ne semble pas monotone, puisque $b_4 < b_3$ (elle est jusque-là croissante).
2. On a $c_{n+1} = b_{2n+2} = \sqrt{0 + b_{2n+1}} = \sqrt{b_{2n+1}} = \sqrt{\sqrt{1 + b_{2n}}} = (1 + b_{2n})^{\frac{1}{4}} = (1 + c_n)^{\frac{1}{4}}$.
3. On a déjà vu plus haut que $c_0 \leq c_1$. Supposons donc $c_n \leq c_{n+1}$. On a alors certainement $1 + c_n \leq 1 + c_{n+1}$, donc $(1 + c_n)^{\frac{1}{4}} \leq (1 + c_{n+1})^{\frac{1}{4}}$, soit $c_{n+1} \leq c_{n+2}$. Ceci prouve l'hérédité, la suite est bien croissante.
4. Encore une petite récurrence. La propriété est clairement vraie pour c_0, et en la supposant vraie pour c_n, on aura $1 + c_n \leq 3$, donc $(1 + c_n)^{\frac{1}{4}} \leq \sqrt{\sqrt{3}} \leq 2$ (puisque $\sqrt{3}$ est déjà plus petit que 2), ce qui prouve l'hérédité. La suite est croissante et majorée donc convergeante.
5. On sait que $b_{2n+2} = \sqrt{b_{2n+1}}$, soit $b_{2n+1} = (b_{2n+2})^2$. Comme $\lim_{n \to +\infty} b_{2n+2} = l$ (limite non connue mais finie d'après la question précédente), on a donc $\lim_{n \to +\infty} b_{2n+1} = l^2$. Si la suite (b_n) convergeait, ces deux limites devraient certainement être égales, c'est-à-dire qu'on aurait $l^2 = l$, donc $l = 1$ ou $l = 0$. Mais ces deux valeurs sont certainement exclues puisque $c_2 = 2^{\frac{1}{4}} > 1$, et la suite est croissante. Conclusion : la suite (b_n) ne peut pas converger.

III.Un autre cas particulier.

1. Tout étant positif, on peut élever cette inégalité au carré, ce qui donne $2n+1 \leq (n+1)^2$, soit $2n+1 \leq n^2+2n+1$, ce qui est certainement vrai.
2. L'inégalité de gauche est évidente : $b_n = \sqrt{n+b_{n-1}} \geq \sqrt{n}$ (tous les termes de la suite étant clairement positifs). Pour celle de droite, faisons une petite récurrence. C'est vrai pour $b_0 = 0$. Supposons la propriété vraie pour un entier n, alors $b_{n+1} = \sqrt{n+1+b_n} \leq \sqrt{n+1+n} \leq \sqrt{2n+1} \leq n+1$ d'après la question précédente, ce qui prouve l'hérédité.
3. Calculons $\dfrac{b_{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{\sqrt{n+1+b_n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{1+\dfrac{b_n}{n+1}}$.
4. Comme $b_n \leq n \leq n+1$, on a $\sqrt{1+\dfrac{b_n}{n+1}} \leq \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, donc $\dfrac{b_{n+1}}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{2}$, d'où $b_{n+1} \leq \sqrt{2(n+1)}$. En décalant la relation, on obtient $b_n \leq \sqrt{2n}$. Mais on peut alors dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{n+1} = 0$, donc en reprenant la relation de la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_{n+1}}{\sqrt{n+1}} = 1$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{\sqrt{n}} = 1$.

IV.Un cas plus général

1. Supposons que la suite (b_n) converge mais pas la suite (a_n). Cette dernière étant croissante, elle ne serait pas majorée, et divergerait donc vers $+\infty$. On aurait alors certainement $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{a_{n+1}+b_n} = +\infty$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{n+1} = +\infty$, ce qui contredirait fortement la convergence de (b_n). La suite (a_n) est donc nécessairement convergente.
2. C'est une petite récurrence. On a $b_0 = \sqrt{a_0}$, et $b_1 = \sqrt{a_1+b_0} > b_0$, puisque $a_1 \geq a_0$ (la suite est croissante) donc a fortiori $a_1+b_0 \geq a_0$. Supposons donc $b_n \leq b_{n+1}$, alors, comme par ailleurs $a_{n+1} \leq a_{n+2}$, $a_{n+1}+b_n \leq a_{n+2}+b_{n+1}$, donc $\sqrt{a_{n+1}+b_n} \leq \sqrt{a_{n+2}+b_{n+1}}$, c'est-à-dire que $b_{n+1} \leq b_{n+2}$, ce qui prouve l'hérédité.
3. Cela revient à dire que l'équation b^2-a-b a une unique solution positive. Or, elle a pour discriminant $1+4a > 0$ (la suite (a_n) est positive, donc sa limite aussi), et admet deux racines $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2} < 0$, et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2} > 0$. Cela répond bien à la question.
4. Une dernière récurrence. On sait que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a$. On a donc $b_0 = \sqrt{a_0} \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{a+b} = b$. Supposons $b_n \leq b$, alors $b_n + a_{n+1} \leq b+a$, donc $b_{n+1} \leq \sqrt{a+b} = b$. Ceci prouve l'hérédité.
5. La suite (b_n) est croissante majorée, elle converge donc. Par passage à la limite dans la relation de récurrence définissant la suite (b_n), et en notant cette limite l, on obtient $l = \sqrt{a+l}$, donc $l = b$. Autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.