TD n°5 : révisions pour le DS4

PTSI B Lycée Eiffel

8 janvier 2015

Exercice 1

1. On considère l'équation $z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = 0$.
   (a) Déterminer une solution imaginaire pure de cette équation.
   (b) En déduire toutes les solutions de l'équation.
   (c) Placer les images des solutions obtenues dans le plan complexe. On complètera la figure au fur et à mesure de l'exercice, elle doit contenir à la fin les points A, B, C et I ainsi que le cercle $\mathcal{C}$.
2. On note pour toute la suite de l'exercice A le point d'affixe $1-i$ et B celui d'affixe $2-2i$ dans le plan complexe. Vérifier de deux manières que le triangle OAB est rectangle (en notant bien sûr O l'origine du repère) : par un calcul de distances, et par un calcul d'arguments.
3. (a) Déterminer l'unique isométrie directe f de centre O vérifiant $f(A) = B$, préciser son angle et son rapport.
   (b) Caractériser l'application $f \circ f$.
   (c) On note $C = f \circ f(A)$. Vérifier que ABC est un triangle rectangle (méthode au choix, cette fois-ci).
4. On note I le point d'affixe $-\dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{4}i$.
   (a) Donner une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon $\dfrac{5}{\sqrt{8}}$.
   (b) Vérifier que A, B et C appartient tous les trois à ce cercle (si vous n'avez pas obtenu l'affixe du point C, faites le calcul au moins pour A et pour B).
   (c) Que représente I pour le segment $[BC]$? Comment le résultat de la question précédente auraitèil pu être démontré sans calculs (exploitez ce qui précède et vos souvenirs de géométrie des années antérieures) ?

Exercice 2

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 3$ et les relations $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_n = \dfrac{7}{u_n}$.

1. Calculer les premiers termes de chaque suite (on s'arrêtera à u_2 et v_2, en donnant évidemment des valeurs sous forme fractionnaire).
2. Justifier que les deux suites ne comportent que des termes strictement positifs.
3. Démontrer que $(u_n + v_n)^2 - 28 = (u_n - v_n)^2$, en déduire que $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$, puis que $u_n \geq v_n$ pour tout entier naturel n.
4. Déterminer la monotonie de chacune des deux suites (u_n) et (v_n).

5. (a) Montrer que, $\forall n \geq 1$, $u_n \geq \dfrac{21}{8}$.
   (b) En déduire que $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{1}{10}(u_n - v_n)^2$.
   (c) Montrer par récurrence que $u_n - v_n \leq \dfrac{1}{10^{2^n - 1}}$, et en déduire la limite de la suite $(u_n - v_n)$.
6. Conclure des questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et donner leur limite commune.
7. Déterminer une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-3} près.

Exercice 3

On considère dans tout ce problème la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On notera I la matrice identité d'ordre 4.

1. Calculer A^2.
2. Déterminer deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I$.
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe deux réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$. Donner par la même occasion des formules de récurrence exprimant α_{n+1} et β_{n+1} en fonction de α_n et β_n.
4. Montrer que la suite (α_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, calculer α_n.
5. En déduire β_n puis l'expression de A^n.
6. On note B la matrice appartenant à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à -1. Après avoir calculé B^2 et B^3, conjecturer puis prouver l'expression de B^n.
7. Retrouver l'expression de A^n à l'aide des résultats de la question précédente et de la formule du binome de Newton.

Problème

Dans tout ce problème, (a_n) étant une suite de réels positifs, on lui associe une suite (b_n) de la façon suivante : $b_0 = \sqrt{a_0}$ et $\forall n \geq 1$, $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} + b_n}$. Dans les trois premières parties du problème, on étudiera des cas particuliers de suites (a_n). Dans la dernière partie, on essaiera de déterminer le comportement de (b_n) dans le cas où (a_n) est une suite croissante.

I. Cas d'une suite (a_n) constante.

On suppose dans toute cette partie que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$.

1. Calculer les valeurs de b_0, b_1 et b_2, et montrer que $b_0 < b_1 < b_2$.
2. On définit une fonction f par $f(x) = \sqrt{1+x}$. Dresser le tableau de variations de f, résoudre l'équation $f(x) = x$, et étudier le signe de $f(x) - x$ sur l'ensemble de définition de f.
3. En utilisant les résultats de la question précédente, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \in \left[1; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, puis prouver que la suite (b_n) est croissante.
4. En déduire la convergence de (b_n), et déterminer sa limite, qu'on notera désormais l.
5. Montrer que, $\forall x \geq 0$, $l - \sqrt{1+x} \leq \dfrac{1}{2}(l - x)$ (on pourra penser à la quantité conjuguée, et utiliser le fait que $f(l) = l$).

6. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $l - b_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(l - b_n)$, puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $l - b_n \leq \dfrac{1}{2^n}$.
7. Déterminer une valeur de n pour laquelle b_n est une valeur approchée de sa limite à 10^{-3} près.

II. Cas d'une suite périodique.

On suppose désormais que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = 1$.

1. Calculer b_0, b_1, b_2, b_3 et b_4. La suite semble-t-elle monotone ?
2. On s'intéresse désormais uniquement aux termes d'indices pairs de la suite (b_n). Autrement dit, on pose $c_n = b_{2n}$. Déterminer c_{n+1} en fonction de c_n.
3. Montrer par récurrence que la suite (c_n) est croissante.
4. Montrer que (c_n) est majorée par 2. En déduire la convergence de la suite (b_{2n}).
5. Montrer, en exprimant b_{2n+1} en fonction de b_{2n+2}, que la suite (b_n) ne peut pas être convergente.

III. Un autre cas particulier.

On suppose désormais que $a_n = n$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2n+1} \leq n + 1$.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \leq b_n \leq n$. Quelle est la limite de la suite (b_n) ?
3. Exprimer $\dfrac{b_{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ en fonction de n et de b_n.
4. En déduire que $b_n \leq \sqrt{2n}$, puis la limite de $\dfrac{b_n}{\sqrt{n}}$.

IV. Un cas plus général

On suppose dans cette partie que la suite (a_n) est croissante.

1. Montrer que si (b_n) converge, alors (a_n) converge également.
2. On suppose désormais, pour toute la fin du problème, que (a_n) est convergente vers une certaine limite a. Prouver alors que (b_n) est une suite croissante.
3. Montrer qu'il existe un unique réel $b > 0$ tel que $b = \sqrt{a + b}$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq b$.
5. En déduire que (b_n) converge, et exprimer sa limite en fonction de a.