TD n°4 : révisions pour le DS3

PTSI B Lycée Eiffel

27 novembre 2014

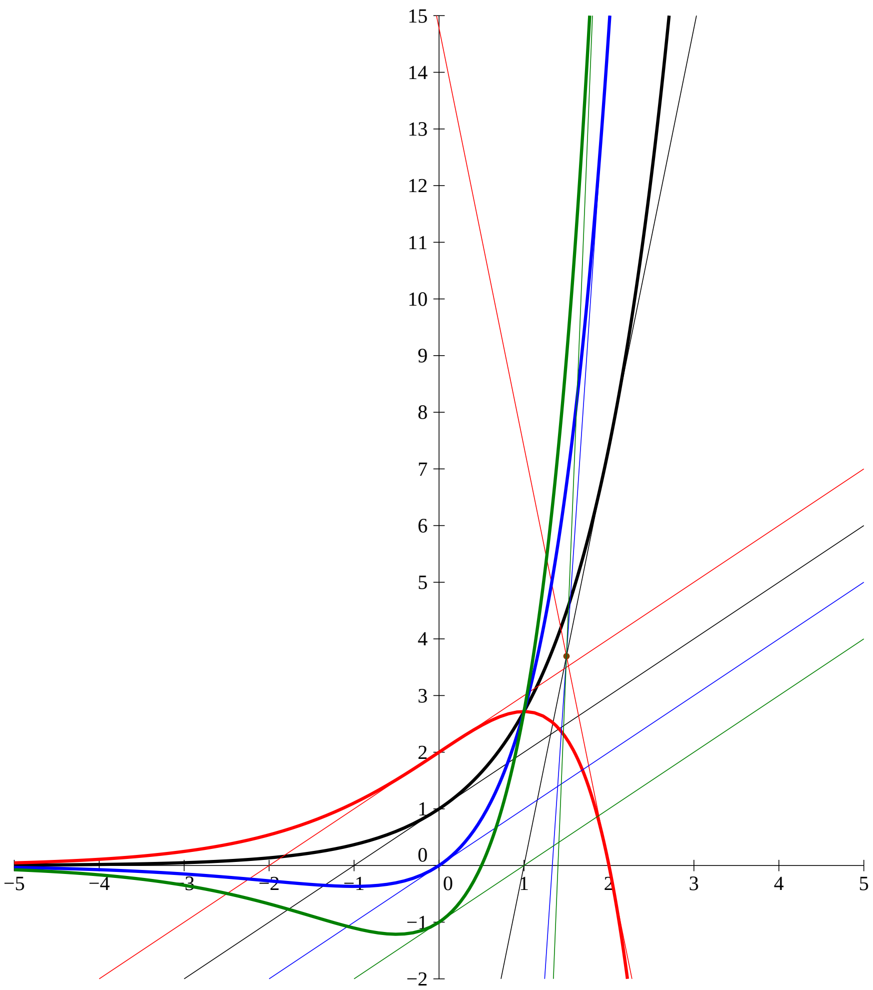
Exercice 1

1. L'équation caractéristique associée est r^2+2r+4, qui a pour discriminant $\Delta = -12$, et admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \dfrac{-2+i\sqrt{12}}{2} = -1+i\sqrt{3}$ et $r_2 = -1-i\sqrt{3}$. Avec les notations vues en cours, on a donc $r=-1$ et $\omega = \sqrt{3}$, ce qui donne des solutions homogènes de la forme $y_h(x) = (A\cos(\sqrt{3}x) + B\sin(\sqrt{3}x))e^{-x}$.
2. Le second membre est un produit de polynôme par une exponentielle, on peut chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = (ax+b)e^x$. On aura alors $y_p'(x) = (a+ax+b)e^x$, puis $y_p''(x) = (ax+2a+b)e^x$, dont $y_p''(x)+2y_p'(x)+4y_p(x) = (ax+2a+b+2ax+2a+2b+4ax+4b)e^x = (7ax+4a+7b)e^x$. Par identification, y_p sera solution si $7a=1$ et $4a+7b=0$, soit $a=\dfrac{1}{7}$ et $b=-\dfrac{4}{49}$. Autrement dit $y_p(x) = \dfrac{(7x-4)e^x}{49}$, et les solutions de l'équation complète sont donc toutes les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{(7x-4)e^x}{49} + (A\cos(\sqrt{3}x)+B\sin(\sqrt{3}x))e^{-x}$.
3. En reprenant la formule précédente pour les solutions, $y(0)=1 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{49}+A=1$, soit $A=\dfrac{53}{49}$, et $y(1)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{3e}{49} + \dfrac{A\cos(\sqrt{3})+B\sin(\sqrt{3})}{e} = 0$, soit $B = \dfrac{3e^2}{49\sqrt{3}} - \dfrac{53e}{49\tan(\sqrt{3})}$. Ces valeurs ignobles sont bel et bien uniques, et donnent une solution particulière que je n'ai même pas envie de recopier entièrement (mais oui, cette question était sans aucun intérêt !).
4. On pose donc plus simplement $f(t) = g(\ln(t))$, ce qui est légitime pour une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, et on calcule comme d'habitude $f'(t) = \dfrac{1}{t}g'(\ln(t))$ puis $f''(t) = -\dfrac{1}{t^2}g'(\ln(t)) + \dfrac{1}{t^2}g''(\ln(t))$. En reportant ces valeurs dans l'équation, on trouve $g''(\ln(t)) + 2g'(\ln(t)) + 4g(\ln(t)) = t\ln(t)$, soit $g''(x)+2g'(x)+4g(x) = xe^x$. Coïncidence extraordinaire, il s'agit justement de l'équation qu'on vient de résoudre, on connait donc les fonctions g solutions et il ne reste plus qu'à refaire le changement de variable $f(t) = g(\ln(t))$ pour trouver $f : t \mapsto \dfrac{t(7\ln(t)-4)}{49} + \dfrac{A\cos(\sqrt{3}\ln(t)) + B\sin(\sqrt{3}\ln(t))}{t}$.

Exercice 2

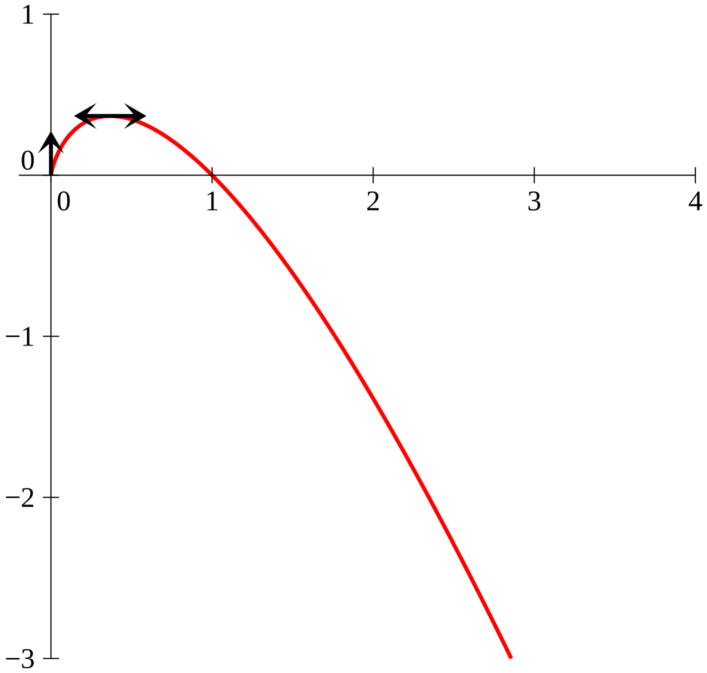
1. Puisqu'il faut diviser par $1-x$, on va effectuer une résolution séparée sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$.
2. On cherche donc à résoudre l'équation linéaire $y' + \left(\dfrac{1}{1-x} - 1\right)y = \dfrac{e^x}{1-x}$. L'équation homogène associée a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{x+\ln|1-x|} = Ke^x(1-x)$ (quitte à changer le signe de la constante sur $]-\infty;1[$).

3. Pour trouver une solution particulière à l'équation, rien de mieux ici que d'utiliser la méthode de variation de la constante : on cherche $y_p(x) = K(x)(1-x)e^x$, ce qui donne $y_p'(x) = K'(x)(1-x)e^x - K(x)e^x + K(x)(1-x)e^x$. La fonction y_p est donc solution de l'équation initiale si $K'(x)(1-x)e^x - K(x)e^x + K(x)(1-x)e^x + K(x)e^x - K(x)e^x(1-x) = \dfrac{e^x}{1-x}$, c'est-à-dire si $K'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$. On peut choisir $K(x) = \dfrac{1}{1-x}$, soit $y_p(x) = e^x$. Bon, euh oui, en fait on aurait pu se rendre compte que cette solution était plus ou moins évidente. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto (1 + K(1-x))e^x$.
4. Les fonctions obtenues sont certainement définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Elles vérifient toutes $y(1) = e$, et comme $y'(x) = (-K + 1 + K(1-x))e^x = (1 - Kx)e^x$, on a $y'(1) = (1-K)e$. On ne peut donc pas recoller des morceaux ayant des valeur différentes de la constante K sur chacun des deux intervalles.
5. Avec la forme précédente, $y(0) = 1+K$, donc $f(0) = \alpha$ se produit si et seulement si $K = \alpha - 1$. La solution cherchée est bien unique. De plus, $y'(0) = 1$ quelle que soit la valeur de K, donc les tangentes de toutes les solutions en 0 sont effectivement parallèles.
6. Continuons nos petits calculs : $y(2) = (1-K)e^2$, et $y'(2) = (1-2K)e^2$. L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est donc $(1-2K)e^2(x-2) + (1-K)e^2 = [(1-2K)x + 3K - 1]e^2$. Si on veut que toutes ces droites soient concourantes, il faut trouver une valeur de x pour laquelle l'expression précédente ne dépend pas de K, ce qui est effectivement le cas si $-2Kx + 3K = 0$, soit $x = \dfrac{3}{2}$. On a alors toujours $y = \dfrac{e^2}{2}$, les tangentes se coupent donc au point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{e^2}{2}\right)$.
7. Rien de bien difficile, la dérivée s'annule pour $x = \dfrac{1}{K}$ (sauf évidemment dans le cas particulier $K = 0$, où y est simplement la fonction exponentielle qu'on n'a pas vraiment besoin d'étudier), la fonction est croissante sur $\left]-\infty; \dfrac{1}{K}\right[$ et croissante sur $\left]\dfrac{1}{K}; +\infty\right[$, la limite de y en $-\infty$ est toujours nulle (pas croissance comparée), en $+\infty$ ça dépend du signe de K : si $K < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$, et si $K > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$.
8. On peut bien évidemment tracer les tangentes étudiées plus haut en plus des courbes des fonctions, qui correspondent à $K = -1$, $K = 0$ (fonction exponentielle), $K = 1$ et $K = -2$. En bleu $\alpha = 0$, en noir $\alpha = 1$, en rouge $\alpha = 2$ et en vert $\alpha = -1$. Les tangentes en 0 ont pour équations respectives $y = x$, $y = x + 1$, $y = x + 2$ et $y = x + 3$. Et les tangentes en 2 ont pour équation respectives $y = (3x - 4)e^2$, $y = (x - 1)e^2$, $y = (-x + 2)e^2$ et $y = (5x - 7)e^2$.



Exercice 3

1. La fonction est naturellement définie, dérivable et tout ce qu'on veut sur $]0, +\infty[$. Commençons par étudier ses variations : $f'(x) = -\ln(x) - 1$, qui s'annule en $e^{-1} = \frac{1}{e}$. La fonction est croissante sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ et décroissante ensuite, et admet pour maximum $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$. Les calculs de limites ne sont pas plus compliqués : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ est immédiat, et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ par croissance comparée. On peut donc prolonger la fonction par continuité en posant $f(0) = 0$. our savoir si ce prolongement est dérivable, on peut calculer le taux d'accroissement en 0 : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-x\ln(x)}{x} = -\ln(x)$, qui a pour limite $+\infty$ quand x tend vers 0. Le prolongement n'est donc pas dérivable en 0, on peut par contre affirmer la présence d'une tangente verticale en 0. Une allure de courbe :



2. On commence bien sûr par normaliser l'équation : $y' - \frac{1}{x}y = -1$. L'équation sans second membre a des solutions de la forme $y_h(x) = Ke^{\ln(x)} = Kx$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $y_h(x) = Le^{\ln(-x)} = -Lx$ sur $\mathbb{R}^{-*}$. On peut deviner une solution particulière évidente ici, mais pour s'entraîner, appliquons la variation de la constante (sur les deux intervalles simultanément, inutile de faire deux calculs) en cherchant $y_p(x) = xK(x)$. On a alors $y_p'(x) = K(x) + xK'(x)$, donc $y_p(x) - \frac{1}{x}y_p(x) = K(x) + xK'(x) - K(x) = xK'(x)$. La fonction y_p est donc solution de notre équation différentielle si $xK(x) = -1$, soit $K(x) = -\ln(|x|)$, et donc $y_P(x) = -x\ln(|x|)$. Finalement, les solutions sont de la forme $y(x) = (K - \ln(x))x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $y(x) = -(L + \ln(-x))x$ sur $\mathbb{R}^{-*}$. En laissant sous forme développée, et en appliquant des résultat de croissance comparée classique, on voit que toutes ces solutions ont une limite nulle en 0 (que ce soit en 0^+ ou en 0^- selon l'intervalle sur lequel elles sont définies). Reste le problème de la dérivée : si on prend la formule obtenue sur $\mathbb{R}^{+*}$, $y'(x) = K - \ln(x) - 1$, qui a une limite infinie en 0. Même pas la peine de chercher à étudier de l'autre côté, on ne pourra de toute façon pas obtenir de solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ à l'équation.
3. On sait que $f(x) = (K - \ln(x))x$. Pour avoir $f(x_0) = y_0$, on impose donc $(K - \ln(x_0))x_0 = y_0$, ou encore $K = \frac{y_0}{x_0} + \ln(x_0)$. On peut alors écrire que $f(x) = \left(\frac{y_0}{x_0} - \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)\right)x$. On a déjà calculé la dérivée des solutions plus haut, on sait que $f'(x_0) = K - \ln(x_0) - 1 = \frac{y_0}{x_0} - 1$. La tangente correspondante a donc pour équation $y = \left(\frac{y_0}{x_0} - 1\right)(x - x_0) + y_0 = \left(\frac{y_0}{x_0} - 1\right)x + x_0$. Si on veut que les droites soient concourantes, il vaut trouver une valeur de x pour laquelle y ne dépend pas de y_0. Comme $y = y_0 \times \frac{x}{x_0} + x_0 - x$, il suffit de prendre $x = 0$, ce qui donne toujours $y = x_0$. Je vous sens venir, vous allez protester que 0 n'appartient pas à $\mathbb{R}^{+*}$ et que ça pose problème. En fait, pas du tout ! Les tangentes à la courbe sont des droites, définies pour tout réel, et peu importe qu'elles soient concourantes à une abscisse nulle.
4. Répétons une nouvelle fois que, pour les solutions de (E), $y'(x) = K - \ln(x) - 1$. Cette dérivée s'annule lorsque $x = e^{K-1}$, et elle est négative avant cette valeur et positive après, ce qui correspond bien à un maximum. La valeur du maximum correspondant est $y(e^{K-1}) = (K - \ln(e^{K-1}))e^{K-1} = e^{K-1}$. Autrement dit, le maximum est toujours situé sur la droite

d'équation $y = x$. Plus précisément, le lieu des maxima est la demi-droite ouverte issue de l'origine incluse dans cette droite, puisqu'on e^{K-1} parcourt exactement $\mathbb{R}^{+*}$ lorsque K varie dans $\mathbb{R}$.

5. Résumons les données des questions précédentes dans le cas où $x_0 = 1$: on aura $K = y_0$ et la tangente au point d'abscisse 1 aura pour équation $y = (K-1)x + 1$. ces tangentes se coupent au point de coordonnées $(0, 1)$. Pour $K = 0$, la solution est simplement la fonction f étudiée à la question 1. En général, notre solution aura un maximum en e^{K-1}, de valeur identique. Sur la figure, est tracée en pointillés la demi-droite qui est le lieu des maxima, en bleu les tangentes en 1, et les courbes en diverses couleurs pour des valeurs différentes de K : rouge pour $K = 0$, vert pour $K = 1$, violet pour $K = 2$, et marron pour $K = -1$. Les maxima ne sont exceptionnellement pas indiqués par des doubles flèches horizontales pour ne pas surcharger la figure mais seulement par des points noirs.