TD n°4 : révisions pour le DS3

PTSI B Lycée Eiffel

27 novembre 2014

Exercice 1

On considère l'équation différentielle $y'' + 2y' + 4y = xe^x$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à cette équation.
2. Trouver une solution particulière de l'équation, en déduire ses solutions.
3. Déterminer explicitement la solution y vérifiant $y(0) = 1$ et $y(1) = 0$.
4. On considère pour cette dernière question l'équation $t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t\ln(t)$, où f est supposée définie uniquement sur $]0, +\infty[$. En posant $g(x) = f(e^x)$, et en exploitant les résultats des questions précédentes, résoudre cette nouvelle équation.

Exercice 2

On s'intéresse dans cet exercice à l'équation différentielle $(1 - x)y' + xy = e^x$.

1. Sur quels intervalles va-t-on se placer pour résoudre l'équation homogène ?
2. Résoudre sur chacun de ces intervalles l'équation sans second membre associée à notre équation différentielle. On pourra remarquer que $\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - 1$.
3. En déduire les solutions de l'équation complète sur les intervalles définis à la première question.
4. Étudier l'existence de solutions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ tout entier.
5. Montrer qu'il existe une unique solution définie sur $\mathbb{R}$, qu'on notera f_α, vérifiant $f(0) = \alpha$, et que toutes ces solutions ont des tangentes parallèles en 0.
6. Montrer que les tangentes en leur point d'abscisse 2 aux courbes représentatives des fonctions f_α sont toutes concourantes.
7. Étudier les fonctions f_α sur $\mathbb{R}$ (variations, limites).
8. Tracer dans un même graphique les courbes intégrales correspondant à $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ et $\alpha = -1$.

Exercice 3

On considère dans tout cet exercice l'équation différentielle $(E) : xy' - y + x = 0$.

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto -x\ln(x)$ sur $]0, +\infty[$, en essayant de la prolonger par continuité en 0 et de déterminer si la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0. On tracera naturellement une allure soignée de la courbe pour conclure cette étude.
2. Résoudre l'équation (E) successivement sur les deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Existe-t-il des solutions à l'équation définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
3. On se concentre désormais aux solutions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $x_0 > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, déterminer l'expression de l'unique solution de (E) vérifiant $f(x_0) = y_0$. Donner une équation de sa tangente au point de la courbe d'abscisse x_0, et prouver que toutes les tangentes obtenues sont concourantes lorsque y_0 parcourt $\mathbb{R}$ (x_0 restant fixé).
4. Vérifier que les courbes des solutions de (E) admettent toutes un maximum sur $\mathbb{R}^{+*}$, et déterminer le lieu des points correspondants.
5. Tracer dans un même repère l'allure de quelques solutions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$, en faisant apparaitre distinctement leur tangentes au point d'abscisse $x_0 = 1$, ainsi que le lieu des maxima déterminé à la question précédente.