TD n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

13 novembre 2014

Exercice 1

1. Calculons donc : $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}(i+j)^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}i^2+2ij+j^2=\sum_{i=1}^{n}ni^2+n(n+1)i+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n^2(n+1)^2}{2}+\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n^2(n+1)(2(2n+1)+3(n+1))}{6}=\frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$.
2. Puisqu'on nous y invite si cordialement, prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : u_n = 3-2^n$. Au rang 0, $3-2^0=3-1=2=u_0$ donc la propriété est effectivement vraie. Supposons-la vérifie à un certain rang n, on peut alors écrire $u_{n+1}^{=}2u_n-3=2\times(3-2^n)-3=6-2^{n+1}-3=3-2^{n+1}$, ce qui prouve exactement P_{n+1}. Par principe de récurrence, la propriété P_n est donc vraie pour tout entier naturel n.
3. Procédons par étapes : $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)'=\dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2}=\dfrac{2}{(1-x)^2}$, puis $\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\times\dfrac{2}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}\times(1-x)\sqrt{1-x}}=\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$. Enfin, $f'(x)=\dfrac{2}{1+\frac{1+x}{1-x}}\times\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{2(1-x)}{2}\times\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Autrement dit, la fonction f a la même dérivée que la fonction arcsin (qui est bien définie sur tout l'intervalle de définition de f). On en déduit que $f(x)=\arcsin(x)+k$, où k est une constante réelle qu'on détermine aisément en calculant une valeur particulière de la fonction : $f(0)=2\arctan(1)=\dfrac{\pi}{2}$. Comme $\arcsin(0)=0$, on peut conclure que $f(x)=\arcsin(x)+\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2

1. Si $A=\emptyset$, $f(C)=(C\cap\emptyset)\cup B=\emptyset\cup B=B$, quel que soit le sous-ensemble C. L'application f est donc constante égale à B.
2. Dans ce deuxième cas particulier, on aura toujours $f(C)=\mathbb{R}$, l'application est à nouveau constante. Ces deux cas ne sont pas du tout les seuls. Par exemple, lorsque $A=B$, on aura toujours $C\cap A\subset A=B$, donc $(C\cap A)\cup B=B$. Ainsi, si $A=B=[0,1]$, f est constante égale à $[0,1]$ (pour donner un exemple concret parmi tant d'autres).
3. Calculons donc : $f(\emptyset)=\emptyset\cup B=B$; $f(A)=A\cup B$; $f(B)=(B\cap A)\cup B=B\cap(A\cup B)=B$; et enfin $f(\mathbb{R})=A\cup B$.
4. C'est essentiellement évident : si $C\subset D$, alors $C\cap A\subset D\cap A$ (en effet, si $x\in C\cap A$, $x\in C\subset D$ donc $x\in D$ et $x\in A$ par hypothèse), puis $f(C)\subset f(D)$ (démonstration tout aussi triviale pour l'union avec B que pour l'intersection avec A).

5. Supposons donc que E admette un antécédent par f, que nous noterons C : on a donc $(C \cap A) \cup B = E$. Manifestement, $B \subset B \cup (C \cap A)$, donc $B \subset E$. De plus, $(C \cap A) \subset A$, donc $E = f(C) \subset A \cup B$. Réciproquement, supposons $B \subset E \subset A \cup B$, et prouvons que $f(E) = E$, ce qui prouvera en passant que E admet un antécédent par f. Soit $x \in E$. Si $x \in B$, nécessairement $x \in f(E)$ (les images par f contiennent toujours tout l'ensemble B), sinon $x \in A$ puisque puisque $E \subset A \cup B$, donc $x \in E \cap A$, et $x \in f(E)$. On en déduit que $E \subset f(E)$. Supposons désormais $x \in f(E)$. Soit $x \in (E \cap A)$, et donc $x \in E$, soit $x \in B \subset E$ donc $x \in E$. On en déduit que $f(E) \subset E$, et donc $f(E) = E$.
6. D'après la question précédente, une condition nécessaire pour que A puisse avoir des antécédents par f est que $B \subset A$. Si c'est le cas, $f(C) \subset A$ quel que soit le sous-ensemble C (puisque $C \cap A$ et B sont tous deux inclus dans A), et $f(C) = A$ si et seulement si $A \backslash B \subset C \cap A$ (pour récuper dans l'union avec B tous les éléments de A n'appartenant pas à B). Il suffit donc d'avoir $A \backslash B \subset C$. Tous les sous-ensembles vérifiant cette condition seront antécedents de A. Pour B (qui est toujours sa propre image et a donc toujours des antécédents), on doit cette fois-ci avoir $C \cap A \subset B$, c'est-à-dire $C \cap (A \backslash B) = \emptyset$. Si on préfère, une condition nécessaire est suffisante est $C \subset B \cup \bar{A}$.
7. Puisque $f(B)$ est toujours égale à B, f ne peut être constante que si tout le monde est antécédent de B, c'est-à-dire si tout sous-ensemble C vérifie la condition $C \subset B \cup \bar{A}$. Il faut donc avoir $B \cup \bar{A} = \mathbb{R}$, ce qui revient exactement à dire que $A \subset B$. On vérifie aisément que cette condition est en effet nécessaire et suffisante : si $A \subset B$, on aura toujours $C \cap A \subset B$, donc $f(C) = B$, et f est constante ; réciproquement, s'il existe un élément $x \in A \backslash B$, $f(\{x\}) = \{x\} \cup B \neq f(B)$, donc f n'est pas constante.
8. Toujours en reprenant les résultats de la question 5., l'application sera surjective si tout sous-ensemble E vérifie les conditions $B \subset E \subset A \cup B$. Ceci n'est possible que si $B = \emptyset$ et $A \cup B = \mathbb{R}$, c'est-à-dire $B = \emptyset$ et $A = \mathbb{R}$. Dans ce cas très particulier, on a $f(C) = (C \cap \mathbb{R}) \cup \emptyset = C$, et l'application f est donc l'identité, qui est certainement surjective ! Pour l'injectivité, il faut déjà que B admette un seul antécédent par f (B a toujours au moins un antécédent puisque $f(B) = B$), ce qui revient à dire qu'un seul sous-ensemble C vérifie $C \subset B \cup \bar{A}$. Pour cela, il faut nécessairement que $B \cup \bar{A} = \emptyset$, donc que $B = \bar{A} = \emptyset$, ce qui revient bien à dire que $B = \emptyset$ et $A = \mathbb{R}$.
9. Quel que soit le sous-ensemble C, on a toujours $B \subset f(C)$, mais aussi $f(C) \subset A \cup B$ puisque $C \cap A \subset A$. Autrement dit, $f(C)$ vérifie toujours les conditions de la question 5., et en reprenant les conclusions de cette même question, on a nécessairement $f(f(C)) = f(C)$. Autrement dit, $f \circ f = f$ (pour faire savant, f est donc une application idempotente).

Exercice 3

1. (a) Jusque-là, c'est facile : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$.

   (b) Pour que $g(x)$ soit défini, il faut donc que -1 ne soit pas compris entre $\frac{1}{x}$ et x. Bien évidemment, $x = 0$ est exclu du domaine de définition. De plus, si $x < 0$, -1 est toujours compris entre $\frac{1}{x}$ et x (soit $x < -1$ et $\frac{1}{x} > -1$, soit c'est le contraire). Par contre, si $x > 0$, seuls des nombres positifs sont compris entre x et $\frac{1}{x}$, donc $g(x)$ est défini. Pour conclure, on a simplement $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^{+*}$.

   (c) Remplacer x par $\frac{1}{x}$ dans la définition de g ne change qu'une chose : les bornes, qui sont inversées. Autrement dit, on aura toujours $g\left(\frac{1}{x}\right) = -g(x)$.

2. (a) Il n'y a rien à expliquer, c'est la définition de l'intégrale !

(b) On peut dériver la relation $g(x) = F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$, en faisant attention à la composée, pour obtenir $g'(x) = f(x) + \dfrac{1}{x^2} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} + \dfrac{1}{x^2} \dfrac{1}{(\frac{1}{x}+1)^2(\frac{1}{x^2}+1)} = \dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} + \dfrac{x^2}{(1+x)^2(1+x^2)}$ (en multipliant chacune des deux parenthèses de la deuxième fraction par x). Tout cela se simplifie merveilleusement bien pour donner $g'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, donc $g(x) = -\dfrac{1}{1+x} + k$, où k est une constante qu'on va bien sûr déterminer explicitement à l'aide d'une valeur simple de g. Ici, le plus rapide est bien sûr de constater que $g(1) = 0$ (puisque, dans ce cas, les deux bornes de l'intégrale sont identiques), donc $0 = -\dfrac{1}{2} + k$, soit $k = \dfrac{1}{2}$. Finalement, $g(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1+x-2}{2(1+x)} = \dfrac{x-1}{2(1+x)}$.

3. (a) Faisons donc ce qu'on nous suggère : on pose $u = \dfrac{1}{t}$, soit $t = \dfrac{1}{u}$, et $dt = -\dfrac{1}{u^2}\,du$. Les bornes de l'intégrale sont alors échangées, ce qu'on va compenser par un simple changement de signe. On trouve alors $g(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(\frac{1}{u}+1)^2(\frac{1}{u^2}+1)} \times \frac{1}{u^2}\,du = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{u^2}{(u+1)^2(u^2+1)}\,du$ (le calcul est essentiellement le même qu'à la question 2*b*). Si on additionne les deux expressions de $g(x)$ (en utilisant comme variable muette commune t dans l'intégrale).

(b) On a alors $2g(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)} + \frac{t^2}{(t+1)^2(t^2+1)}\,dt = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t+1}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} = -\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{x}{1+x} - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x-1}{x+1}$. On retrouve la même expression que tout à l'heure (encore heureux) : $g(x) = \dfrac{x-1}{2(1+x)}$.

4. (a) Pour une fois, soyons bourrins, et effectuons une brutale mise au même dénominateur : $\dfrac{a}{t+1} + \dfrac{b}{(t+1)^2} + \dfrac{ct+d}{t^2+1} = \dfrac{a(t+1)(t^2+1) + b(t^2+1) + (ct+d)(t+1)^2}{(t+1)^2(t^2+1)}$. Contentons-nous de développer le numérateur : $a(t^3+t^2+t+1)+b(t^2+1)+c(t^3+2t^2+t)+d(t^2+2t+1) = (a+c)t^3+(a+b+2c+d)t^2+(a+c+2d)t+a+b+d$. Par identification, on obtient les conditions $a+c=0$, $a+b+2c+d=0$, $a+c+2d=0$ et $a+b+d=1$. On en déduit que $c=-a$, donc $2d=0$ (troisième condition) et $d=0$. On reporte alors dans la deuxième équation : $a+b-2a=0$, soit $a=b$. Reste alors à exploiter la dernière condition, qui devient $a+a=1$, soit $a=b=\dfrac{1}{2}$ et $c=-\dfrac{1}{2}$. Autrement dit, $f(t) = \dfrac{1}{2(t+1)} + \dfrac{1}{2(t+1)^2} - \dfrac{t}{2(t^2+1)}$.

(b) On déduit de la question précédente une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$: $F(t) = \dfrac{1}{2}\ln(t+1) - \dfrac{1}{2(t+1)} - \dfrac{1}{4}\ln(t^2+1)$. On peut alors calculer directement $g(x) = F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x+1) - \dfrac{1}{2(x+1)} - \dfrac{1}{4}\ln(x^2+1) - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right) + \dfrac{1}{2(\frac{1}{x}+1)} + \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x+1) - \dfrac{1}{2(x+1)} - \dfrac{1}{4}\ln(x^2+1) - \dfrac{1}{2}\ln(x+1) + \dfrac{1}{2}\ln(x) + \dfrac{x}{2(x+1)} + \dfrac{1}{4}\ln(x^2+1) - \dfrac{1}{4}\ln(x^2) = \dfrac{x-1}{2(x+1)}$ (tous les ln s'annulent puisque $\ln(x^2) = 2\ln(x)$.

5. Notons I l'intégrale à calculer et commençons par écrire que $I = \displaystyle\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\theta)} + \frac{2\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}\,d\theta$.

On peut alors avoir la brillante idée de poser $t = \tan(\theta)$, ou encore $\theta = \arctan(t)$, donc $d\theta = \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$. On trouve alors $I = \displaystyle\int_{\tan(\alpha)}^{\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)} \frac{1}{1+t^2+2t} \times \frac{1}{1+t^2}\,dt$ (en utilisant la relation $\dfrac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta)$. Il ne reste plus qu'à remarquer que $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)}$ (c'est dans le cours de trigo !) pour en déduire que $I = g(\tan(\alpha))$. En utilisant les résultats des questions précédentes, on peut conclure que $I = \dfrac{\tan(\alpha) - 1}{2(1 + \tan(\alpha))}$.