TD n°3 : révisions pour le DS2

PTSI B Lycée Eiffel

13 novembre 2014

Exercice 1

Un petit fourre-tout pour vous entraîner sur les calculs :

1. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} (i+j)^2$ (on factorisera le résultat).
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 - 2^n$.
3. Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto 2 \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$. En déduire une expression plus simple de $f(x)$ (on admettra sans le vérifier que $\mathcal{D}_f = [-1, 1[$).

Exercice 2

Soient A et B deux sous-ensembles fixés de $\mathbb{R}$, on définit alors une application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ C & \to & (C \cap A) \cup B \end{array} \right.$$

1. On suppose uniquement pour cette question que $A = \emptyset$. Que vaut alors $f(C)$?
2. On suppose uniquement pour cette question que $B = \mathbb{R}$. Que peut-on dire de f ? L'application f peut-elle être constante dans d'autres cas que les deux qu'on vient de citer ?
3. Dans le cas général, déterminer $f(\emptyset)$, $f(A)$, $f(B)$ et $f(\mathbb{R})$.
4. Montrer que, si $C \subset D$, alors $f(C) \subset f(D)$.
5. Montrer qu'un sous-ensemble E quelconque de $\mathbb{R}$ admet un antécédent par f si et seulement si $B \subset E \subset A \cup B$, et montrer dans ce cas que $f(E) = E$.
6. Déterminer tous les antécédents de A par f (en distinguant des cas si besoin), ainsi que tous ceux de B.
7. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit constante.
8. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit surjective. Montrer qu'on aurait exactement la même condition pour que f soit injective.
9. Dans le cas général, que peut-on dire de $f \circ f$?

Exercice 3

On définit dans cet exercice une fonction g par la formule $g(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}\, dt$, et on va donner plusieurs méthodes permettant de calculer explicitement la valeur de $g(x)$. Les questions 2, 3 et 4 de l'exercice sont **indépendantes**, il est donc hors de question d'utiliser le résultat d'une de ces questions (ou même d'une sous-question) pour traiter les autres.

1. On pose $f(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
   (b) En déduire celui de la fonction g.
   (c) Comparer les valeurs de $g(x)$ et de $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ quand cela a un sens.
2. Première méthode : on note F une primitive quelconque de f valable sur le domaine de définition de g.
   (a) Expliquer pourquoi $g(x) = F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   (b) Exprimer $g'(x)$ à l'aide de f, puis explicitement. En déduire une expression de $g(x)$.
3. Deuxième méthode : exploitation astucieuse d'un changement de variable.
   (a) En posant $u = \dfrac{1}{t}$ dans l'intégrale définissant $g(x)$, donner une nouvelle expression de $g(x)$.
   (b) Faire la somme des deux expressions intégrales de $g(x)$, et retrouver l'expression explicite de $g(x)$.
4. Troisième méthode : bourrinage.
   (a) Décomposer en éléments simples $f(t)$ sous la forme $f(t) = \dfrac{a}{t+1} + \dfrac{b}{(t+1)^2} + \dfrac{ct+d}{t^2+1}$.
   (b) En déduire l'expression de $g(x)$ par une intégration directe.
5. Complément : soit $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Calculer $\displaystyle\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\cos^2(\theta)}{1+\sin(2\theta)}\, d\theta$ (il y a bien sûr un lien avec le reste de l'exercice).