TD n°2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

25 septembre 2014

Exercice 1

1. Cette inéquation n'a de sens que si $x \geq 0$. On peut alors poser $X = \sqrt{x}$ pour obtenir l'inéquation $X^2 - 4X + 3 \geq 0$. Le trinôme du membre de gauche a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet donc pour racines $X_1 = \dfrac{4+2}{2} = 3$ et $X_2 = \dfrac{4-2}{2} = 1$. Il est donc positif si $X \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$. On en déduit, en ne gardant que les valeurs positives, que $\mathcal{S} = [0; 1] \cup [\sqrt{3}; +\infty[$.
2. Pas d'autre choix ici que de faire un tableau de signes pour $|x^2 - 1| - |x - 2|$:

x		-1		1		2	
$\lvert x^2-1\rvert$	x^2-1	0	$1-x^2$	0	x^2-1		x^2-1
$\lvert x-2\rvert$	$2-x$		$2-x$		$2-x$	0	$x-2$
$\lvert x^2-1\rvert - \lvert x-2\rvert$	x^2+x-3	-3	$-x^2+x-1$	-1	x^2+x-3	3	x^2-x+1

Reste à résoudre pas moins de quatre équations. Sur $]-\infty; -1]$, $x^2+x-3 = -1 \Rightarrow x^2+x-2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ (pas valable), et $x_2 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ (valable). Sur $[-1; 1]$, on obtient $-x^2 + x0 = 0$, soit $x = 0$ (valable) ou $x = 1$ (valable aussi). Sur $[1; 2]$, on a $x^2 + x - 2 = 0$, équation déjà résolue tout à l'heure, qui donne pour racines -2 (non valable sur cet intervalle) et 1 (valable mais déjà obtenue sur l'intervalle précédent). Enfin, sur $[2; +\infty[$, on a $x^2 - x + 2 = 0$, qui a un discriminant négatif. On déduit de tout cela que $\mathcal{S} = \{-2; 0; 1\}$.
3. Cette équation du troisième degré a pour racine évidente -1 puisque $2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 2 = -2 - 3 + 3 + 2 = 0$. On peut donc la factoriser sous la forme $(x+1)(ax^2 + bx + c) = 0$. En développant, on a $(x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$, dont on déduit par identification que $a = 2$, $b = -5$ et $c = 2$. Reste à résoudre l'équation $2x^2 - 5x + 2 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 25 - 16 = 9$, et qui admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{5+3}{4} = 2$ et $x_2 = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2}$. Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{-1; \dfrac{1}{2}; 2\right\}$.
4. Commençons par constater que l'inéquation n'a pas de sens si $x^2 + 2x = 0$, c'est-à-dire lorsque $x = 0$ ou $x = -2$. Pour toutes les autres valeurs de x, on peut supprimer les ln pour obtenir $|x^2 + 2x| < 3$, c'est-à-dire $-3 < x^2 + 2x < 3$. L'inéquation de gauche revient à dire que $x^2 + 2x + 3 > 0$, ce qui est toujours vrai (le discriminant est négatif), celle de droite donne $x^2 + 2x - 3 < 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et admet donc pour racines $x_1 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$. L'inéquation est donc vérifiée si $x \in]-3; 1[$, et concernant l'inéquation initiale, on a $\mathcal{S} =]-3; -2[\cup]-2; 0[\cup]0; 1[$.

Exercice 2

1. Ces deux fonctions sont évidemment définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. La fonction g a pour dérivée $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x}$. On en déduit que g est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$, admettant un minimum en 1 de valeur $g(1) = 1 - 0 = 1$. La fonction g est donc toujours strictement positive.

3. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} 1+\ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0^-$, on obtient sans difficulté $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$. Pour la limite en $+\infty$, le plus simple est de séparer la deuxième fraction en deux morceaux : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissance comparée pour le dernier morceau), donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

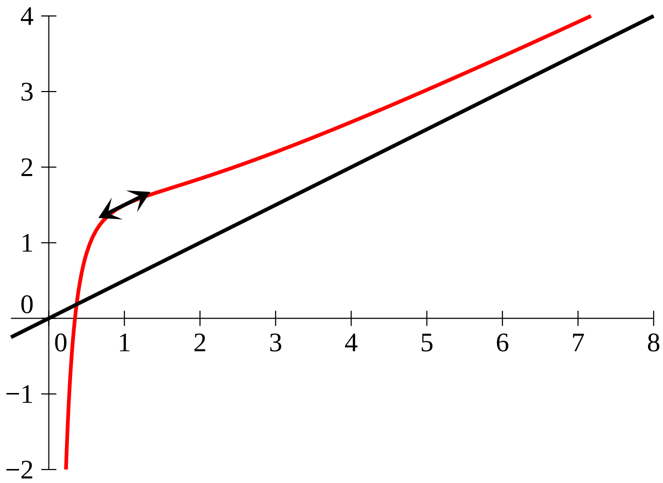
4. Comme $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1+\ln(x)}{x}$, dont on vient de calculer la limite en $+\infty$, tout le travail a déjà été fait.

5. Il faut pour cela étudier le signe de $\frac{1+\ln(x)}{x}$. Le dénominateur étant toujours strictement positif sur $\mathcal{D}_f$, c'est du signe de $1+\ln(x)$, qui s'annule pour $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$. La courbe est donc en-dessous de la droite sur $\left]0;\frac{1}{e}\right]$, et au-dessus sur $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$.

6. Calculons donc $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1-(1+\ln(x))}{x^2} = \frac{x^2 - 2\ln(x)}{2x^2}$. Le dénominateur étant évidemment positif, cette dérivée est du signe du numérateur, c'est-à-dire de g, dont on a vu qu'elle était toujours strictement positive. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

7. Cette équation se ramène à $x^2 - 2\ln(x) = x^2$, soit $\ln(x) = 0$. La seule solution en est donc $x = 1$. les points de la courbe où les tangentes sont parallèles à (D) sont ceux où le coefficient directeur de la tangente vaut $\frac{1}{2}$, autrement dit ceux pour lesquels $f'(x) = \frac{1}{2}$. Comme $f(1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, le seul point correspondant est $\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

8. Voici la courbe demandée :



Problème

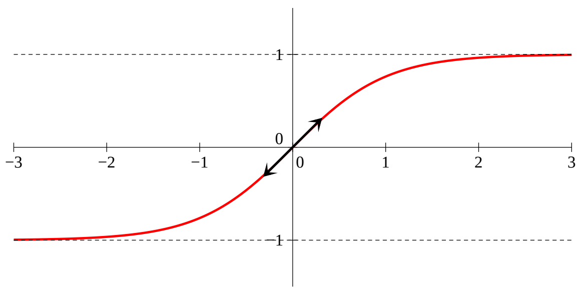
I. Étude de la fonction th.

1. La fonction ch étant toujours strictement positive, th est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, $\mathrm{th}(x) = \frac{e^{-x}(e^{2x}+1)}{e^{-x}(e^{2x}-1)} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$. Enfin, la fonction th est impaire en tant que quotient d'une fonction impaire par une fonction paire.

2. Calculons, par exemple à l'aide de la deuxième forme donnée à la question précédente : $\text{th}'(x) = \dfrac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - 2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \dfrac{4e^{2x}}{(e^x(e^x+e^{-x}))^2} = \left(\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^2 = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)}$. Comme par ailleurs $1-\text{th}^2(x) = 1-\dfrac{\text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \dfrac{\text{ch}^2(x)-\text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)}$, les deux formules sont bien équivalentes. La fonction th a donc une dérivée strictement positive, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Sous sa deuxième forme, le calcul de limite en $-\infty$ est immédiat : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{th}(x) = \dfrac{-1}{1} = -1$. Par imparité de la fonction th, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}(x) = 1$. La fonction th est donc bijective (en tant que fonction continue strictement monotone) de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$. On peut dresser si on le souhaite le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
th	$-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$

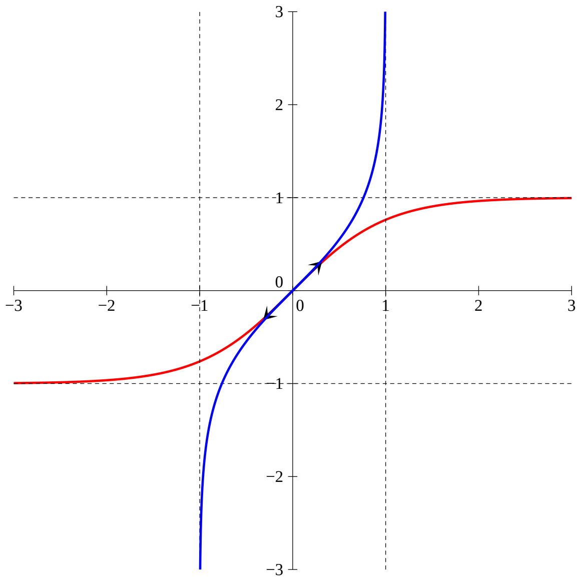
3. Puisque $\text{th}(0) = 0$ et $\text{th}'(0) = 1 - \text{th}^2(0) = 1$, la tangente à l'origine a pour équation $y = x$. Une allure de la courbe :



4. Un calcul immédiat donne $\text{sh}(x) + \text{ch}(x) = e^x$ et $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}$. Les deux formules à démontrer se résument alors aux égalités $e^{x+y} = e^x e^y$ et $e^{-x-y} = e^{-x}e^{-y}$, qui découlent des propriétés bien connues de la fonction exponentielle.
5. En développant tout brutalement, $\text{sh}(x+y)+\text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\,\text{ch}(y)+\text{ch}(x)\,\text{sh}(y)+\text{sh}(x)\,\text{ch}(y)+\text{sh}(x)\,\text{sh}(y)$, et $\text{ch}(x+y) - \text{sh}(x+y) = \text{ch}(x)\,\text{ch}(y) - \text{ch}(x)\,\text{sh}(y) - \text{sh}(x)\,\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\,\text{sh}(y)$. En faisant la somme des deux équations et en divisant par 2, on obtient alors $\text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\,\text{ch}(y)+\text{sh}(x)\,\text{sh}(y)$. En faisant la différence et en divisant par 2, on a cette fois $\text{sh}(x+y) = \text{ch}(x)\,\text{sh}(y) + \text{sh}(x)\,\text{ch}(y)$.
6. On peut faire le même calcul que pour la formule d'addition des tangentes : on divise les deux formules, puis on divise tout en haut et en bas pas $\text{ch}(x)\,\text{ch}(y)$, ce qui donne $\text{th}(x+y) = \dfrac{\text{sh}(x)\,\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\,\text{sh}(y)}{\text{ch}(x)\,\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\,\text{sh}(y)} = \dfrac{\text{th}(y) + \text{th}(x)}{1 + \text{th}(x)\,\text{th}(y)}$.

II. Réciproque de la fonction th.

1. Pas besoin de calcul en effet, la réciproque est continue, strictement croissante, avec deux asymptotes verticales en -1 et en 1. Allez, les deux courbes ensembles :



2. On peut écrire $\text{Argth}'(x) = \dfrac{1}{\text{th}'(\text{Argth}(x))} = \dfrac{1}{1 - \text{th}^2(\text{Argth}(x))}$. Or, $\text{th}(\text{Argth}(x)) = x$ quel que soit le réel x, donc $\text{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

3. Puisque $y = \text{Argth}(x)$, on peut écrire $x = \text{th}(y) = \dfrac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1}$, soit $xe^{2y} - x = e^{2y} + 1$. En regroupant différemment, on trouve bien $e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$. Autrement dit, $y = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (pas de problème, tout est positif si $x \in]-1, 1[$). Cette expression est plus facile à dériver directement. Posons $g(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, alors $g'(x) = \dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$, donc $\text{Argth}'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{(1-x)^2} \times \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{1}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{1}{1-x^2}$. Ouf, on retrouve la bonne formule.

4. (a) La fonction f est définie à condition d'avoir $0 \leq \dfrac{\text{ch}(x)-1}{\text{ch}(x)+1} < 1$ (le quotient doit être positif à cause de la racine carrée, et la racine carrée doit ensuite être strictement inférieure à 1 pour que la composition par Argth soit possible, donc le quotient lui-même doit être strictement inférieur à 1). Comme on sait que ch est minorée par 1, on a toujours $0 \leq \text{ch}(x) - 1 < \text{ch}(x) + 1$, donc la fonction f est toujours définie. Autrement dit, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

   (b) En reprenant les résultats précédents, $f(y) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}{1-\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}\right) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}{\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1}}\right) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{y+1+y-1+2\sqrt{(y-1)(y+1)}}{(y+1)-(y-1)}\right) = \dfrac{1}{2} \ln(y + \sqrt{y^2-1})$.

   (c) En remplaçant y par $\text{ch}(x)$, on trouve donc $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln(\text{ch}(x) + \sqrt{\text{ch}^2(x) - 1})$. Or $\sqrt{\text{ch}^2(x) - 1} = \sqrt{\text{sh}^2(x)} = |\,\text{sh}(x)| = \text{sh}(|x|)$ (car la fonction sh est impaire). Comme la fonction ch, quant à elle, est paire, $\text{ch}(x) = \text{ch}(|x|)$, et $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln(\text{ch}(|x|) + \text{sh}(|x|)) = \dfrac{1}{2} \ln(e^{|x|}) = \dfrac{|x|}{2}$.

III. Une équation fonctionnelle.

1. Les constantes solutions sont les réels k vérifiant $k = \dfrac{2k}{1+k^2}$, soit $k(1+k^2) = 2k$. Soit $k = 0$, soit $1 + k^2 = 2$, donc $k = \pm 1$. Il y a donc trois fonctions constantes solutions.

2. Puisque vous n'êtes pas censés connaitre de formules de trigonométrie hyperbolique compliquées, faisons un calcul brutal : $\dfrac{2\operatorname{th}(x)}{1+\operatorname{th}(x)^2} = \dfrac{\frac{2e^x-2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{1+\frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}} = \dfrac{2(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2+(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{2(e^{2x}-e^{-2x})}{2e^{2x}+2e^{-2x}} = \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} = \operatorname{th}(2x)$.

3. En remplaçant x par 0, on trouve $f(0) = \dfrac{2f(0)}{1+f(0)^2}$, ce qui est exactement l'équation résolue à la première question. On a donc $f(0) = 0$, $f(0) = -1$ ou $f(0) = 1$.

4. On ose ? C'est complètement trivial ! En effet, en supposant f solution, $-f(2x)\dfrac{-2f(x)}{1+(-f(x))^2}$, donc $-f$ est aussi solution, et $f(2kx) = \dfrac{2f(kx)}{1+f(kx)^2}$ en remplaçant simplement x par kx dans l'équation (ça doit être vrai pour tout réel, donc ça ne pose pas le moindre problème).

5. On peut toujours écrire $f(x) = \dfrac{2f(\frac{x}{2})}{1+f(\frac{x}{2})^2}$. Si on prouve que $\dfrac{2t}{1+t^2}$ est toujours compris entre -1 et 1 quelle que soit la valeur du réel t, la fonction f sera donc bornée par -1 et 1. On peut effectuer une étude de fonction pour obtenir l'encadrement, ou être astucieux : $(t+1)^2 \geq 0$ implique $2t \geq -t^2 - 1$, soit en divisant par t^2+1 (qui est positif), $\dfrac{2t}{t^2+1} \geq -1$. De même, comme $(t-1)^2 \geq 0$, on peut dire que $2t \leq 1+t^2$, et en divisant à nouveau par t^2+1, on trouve cette fois-ci $\dfrac{2t}{t^2+1} \leq 1$. On a bien prouvé que $\dfrac{2t}{t^2+1} \in [-1;1]$, soit en posant $t = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $f(x) \in [-1;1]$.