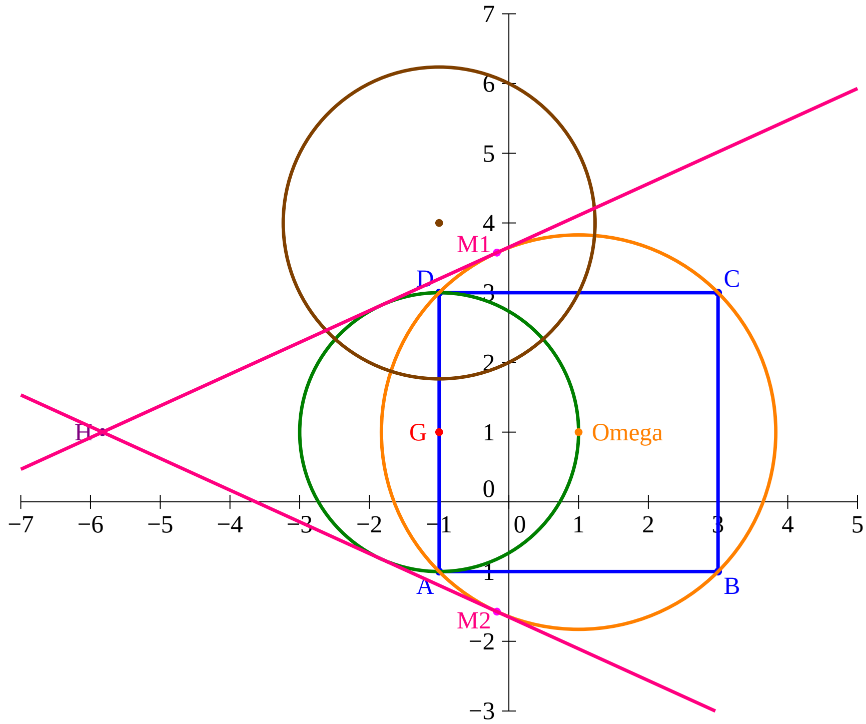
TD n°10 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

11 juin 2015

Exercice

1. Allons-y pour la figure :



2. Pour prouver que c'est un carré, on peut par exemple calculer $AB = BC = CD = DA = 2$ (non, je ne détaille pas), et ajouter le fait que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ (ce que je ne détaille pas non plus). En faisant la moyenne des coordonnées de A et de D, on trouve $G(-1, 1)$.
3. Notons donc $M(x, y)$. On calcule alors $\overrightarrow{MA} = (-1 - x, -1 - y)$, $\overrightarrow{MB} = (3 - x, -1 - y)$ et $\overrightarrow{MC} = (3 - x, 3 - y)$, puis $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (-2 - 2x, 2 - 2y)$. La norme de ce vecteur vaut donc $\sqrt{(-2 - 2x)^2 + (2 - 2y)^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 8x - 8y + 8}$. Comme $\overrightarrow{AB} = 2$, notre ensemble $\mathcal{E}$ a donc pour équation, en élevant au carré, $4x^2 + 4y^2 + 8x - 8y - 8 = 0$, il ne reste plus qu'à tout diviser par 4 pour retrouver l'équation de l'énoncé. On reconnait bien sûr une équation de cercle : $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$, ce qui correspond au cercle de rayon 2 et de centre G (qui est accessoirement le cercle de diamètre $[AD]$).
4. Inutile de faire de gros calculs, le triangle ABC étant un demi-carré, son cercle circonscrit a pour centre le milieu de $[AC]$ (ou si on préfère le centre du carré $ABCD$), soit le point $\Omega(1, 1)$. Le rayon du cercle est $\Omega A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Une équation du cercle est donc $(x-1)^2+(y-1)^2 = 8$, soit $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$.

5. Normalement, on devrait trouver les points A et D comme points d'intersection, vérifions quand même. En soustrayant les deux équations de cercle, on trouve la condition $4x+4=0$, soit $x=-1$. Reportons dans l'équation du deuxième cercle : $y^2-2y-3=0$. Le réel $y=-1$ est solution évidente de cette équation du second degré l'autre solution est $y=3$. Les deux points d'intersection recherchés sont bien A et D.
6. Cherchons donc les points d'intersection entre les tangentes issues de H au cercle $\mathcal{C}$, et le cercle. Autrement dit, on cherche les points $M(x,y)$ vérifiant l'équation de cercle $x^2+y^2-2x-2y-6=0$, et tels que $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{\Omega M}=0$, soit $(x+3+2\sqrt{2})(x-1)+(y-1)^2=0$. Développons brutalement : $x^2+y^2+(2+2\sqrt{2})x-2y-2-2\sqrt{2}=0$. On soustrait les deux équations : $(4+2\sqrt{2})x+4-2\sqrt{2}=0$. On obtient donc directement, en simplifiant tout par 2, $x=\dfrac{\sqrt{2}-2}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{-(2-\sqrt{2})^2}{4-2}=\dfrac{-6+4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}-3$. Il ne reste plus qu'à remplacer dans la joie et la bonne humeur dans une des équations précédentes, de préférence celle obtenue avec le produit scalaire : $4\sqrt{2}(2\sqrt{2}-4)+(y-1)^2=0$, soit $(y-1)^2=16\sqrt{2}-16=16(\sqrt{2}-1)$, et donc $y-1=\pm 4\sqrt{\sqrt{2}-1}$. On en déduit les deux valeurs possibles de l'ordonnée : $y=1+4\sqrt{\sqrt{2}-1}$, et $y=1-4\sqrt{\sqrt{2}-1}$. Les deux points de tangence cherchés sont donc $M_1(2\sqrt{2}-3,1+4\sqrt{\sqrt{2}-1})$, et $M_2(2\sqrt{2}-3,1-4\sqrt{\sqrt{2}-1})$. Il reste à déterminer les équations des droites (HM_1) et (HM_2). Pour cela, il est peut-être plus facile d'utiliser des méthodes « lycée », en commençant par déterminer le coefficient directeur $a=\dfrac{y_{M_1}-y_H}{x_{M_1}-x_H}=\dfrac{4\sqrt{\sqrt{2}-1}}{4\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$. Bien, pour l'ordonnée à l'origine, on part du fait que $ax_H+b=y_H$, soit $b=y_H-ax_H=1+(3+2\sqrt{2})\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}=1+3\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}$, soit une superbe équation de droite : $y=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}x+1+3\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}$. La deuxième tangente a un coefficient directeur opposé, et vérifie donc $b=y_H+ax_H=1-3\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}$, soit pour l'équation de la tangente $y=-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}x+1-3\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

   Reste à prouver que ces deux droites sont aussi tangentes à l'autre cercle $\mathcal{E}$. Pas de méthode triviale pour cela, alors on va tout simplement chercher les tangentes à $\mathcal{E}$ issues de H par la même méthode que ci-dessus, et vérifier que les équations sont les mêmes (le coefficient directeur suffira puisque toutes ces droites passent évidemment par H). Les points de tangente $M(x,y)$ vérifient d'une part l'équation de cercle $x^2+y^2+2x-2y-2=0$, d'autre part la condition $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{GM}=0$, soit $(x+2\sqrt{2}+3)(x+1)+(y-1)^2=0$, ou encore $x^2+y^2+(2\sqrt{2}+4)x-2y+2\sqrt{2}+4=0$. On soustrait les deux équations pour obtenir $(2\sqrt{2}+2)x+2\sqrt{2}+6=0$, soit $x=-\dfrac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}+1}=-\dfrac{(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-1)}{2-1}=1-2\sqrt{2}$. En reportant dans l'équation du produit scalaire, $4(2-2\sqrt{2})+(y-1)^2=0$, donc $(y-1)^2=8(\sqrt{2}-1)$, et $y=1\pm 2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}$. On obtient ainsi comme pente pour la première tangente $\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}}{4}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$. Incroyable, ça marche !

B. Cercles orthogonaux.

1. Puisque $(R_1+R_2)^2=R_1^2+R_2^2+2R_1R_2>R_1^2+R_2^2=O_1O_2^2$, on a $O_1O_2<R_1+R_2$. De même, $(R_1-R_2)^2=R_1^2+R_2^2-2R_1R_2<O_1^2O_2^2$, donc $|R_1-R_2|<O_1O_2$. Ces deux conditions assurent que les deux cercles ont deux points d'intersection.
2. La condition d'orthogonalité des deux cercles est équivalent à dire que le triangle PO_1O_2 est rectangle en P (un résultat obscur appelé théorème de Pythagore), auquel cas les tangentes en

P aux deux cercles sont les droites (OP_1) et (OP_2), qui sont bien orthogonales (et la réciproque est également vraie).

3. On sait que les rayons des deux cercles sont 2 et $2\sqrt{2}$, et le carré de la distance entre leur centre vaut $G\Omega^2 = 4$. Comme 4 n'est pas vraiment égal à $4 + 8$, les deux cercles ne sont pas du tout orthogonaux.
4. Soyons violents et notons (x, y) les coordonnées du centre d'un tel cercle, et r son rayon. On doit avoir d'une part, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8 + r^2$ (orthogonalité avec le cercle $\mathcal{E}$), et d'autre part $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4 + r^2$. En développant, on trouve donc les conditions $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 - r^2 = x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 - r^2 = 0$. La soustraction des deux équations donne $x = -1$, et on reste alors avec la condition $(y - 1)^2 = 4 + r^2$. Il existe en fait une infinité de cerckes convenables puisque toutes les valeurs de y pour lesquelles $(y - 1)^2 - 4 > 0$ donnent une valeur de r possible (une seule, le rayon devant quand même être positif). C'est le cas si $y \in] - \infty, -1[\cap]3, +\infty[$. Par exemple, pour $y = 4$, on obtient $r^2 = 5$, soit $r = \sqrt{5}$ (c'est le seul cercle représenté sur ma figure, en marron).
5. Avec les conditions données, les deux cercles ont pour centres respectifs (a, b) et (d, e), donc, en reprenant les notations précédentes, $O_1O_2^2 = (d - a)^2 + (e - c)^2$. Pour les rayons, il vaut mieux factoriser les équations : la première devient $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c + a^2 + b^2$, soit un carré du rayon égal à $c + a^2 + b^2$. De même, $R_2^2 = f + d^2 + e^2$. La condition d'orthogonalité s'écrit donc $(d - a)^2 + (e - c)^2 = c + f + a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, soit en développant et en simplifiant brutalement, $-2ad - 2ec = c + f$, ou encore $c + f - 2(ad + ce) = 0$.