TD n°10 : révisions pour le DSn°9

PTSI B Lycée Eiffel

11 juin 2015

Exercice

A. Un exemple.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les quatre points $A(-1, -1)$, $B(3, -1)$, $C(3, 3)$ et $D(-1, 3)$. On notera également G le milieu du segment $[AD]$.

1. Faire une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.
2. Montrer que $ABCD$ est un carré, et déterminer les coordonnées de G.
3. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points du plan vérifiant $\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{AB} \|$. Montrer que $\mathcal{E}$ admet pour équation $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$, et reconnaitre l'ensemble $\mathcal{E}$.
4. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC. On donnera les coordonnées de son centre Ω.
5. Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{E}$.
6. On note $H(-3-2\sqrt{2}, 1)$. Déterminer l'équation des tangentes à $\mathcal{C}$ issues du point H, et vérifier que ces tangentes sont également tangentes à $\mathcal{E}$.

B. Cercles orthogonaux.

Deux cercles du plan de rayons respectifs R_1 et R_2 et de centres respectifs O_1 et O_2 sont dits orthogonaux si $O_1O_2^2 = R_1^2 + R_2^2$.

1. Montrer que deux cercles orthogonaux se coupent nécessairement en deux points P et Q.
2. Montrer que deux cercles sécants en P sont orthogonaux si et seulement si les tangentes aux deux cercles passant par P sont orthogonales (on fera une figure pour illustrer).
3. Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ de la première partie sont-ils orthogonaux ?
4. Déterminer tous les cercles du plan qui sont simultanément orthogonaux à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{E}$ (on en tracera quelques-uns sur la figure de la première partie).
5. Si deux cercles ont pour équations respectives $x^2 + y^2 - 2ax - 2by - c = 0$ et $x^2 + y^2 - 2dx - 2ey - f = 0$, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients a, b, c, d, e et f pour que les cercles soient orthogonaux.