TD n°1

PTSI B Lycée Eiffel

4 septembre 2014

Exercice 1

Étudier le plus complètement possible les fonctions suivantes :

- $f(x) = x\ln(x+1)$
- $g(x) = \dfrac{x^2-3}{x+2}$
- $h(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$

Exercice 2

Simplifier le plus possible (et le plus rapidement possible aussi !) les expressions suivantes :

- $\dfrac{5}{18} + \dfrac{7}{12}$
- $2^{n+3} - 2^n + 5 \times 2^{n+1} - 3 \times 2^{n+2}$
- $\dfrac{3x+1}{x-1} - \dfrac{2x-1}{x^2-2x+1}$
- $\dfrac{\sqrt{96}}{\sqrt{648}}$
- $\dfrac{12 \times 10^4 \times 9}{5^{-2} \times 15^3 \times 128}$
- $(3 - 2\sqrt{3})^3$

Problème

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit sur $[1; +\infty[$ la fonction f_n par $f_n(x) = \sqrt{x+1}e^{-nx}$, et on note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative.

1. Étudier la fonction f_1, et dresser son tableau de variations.
2. Calculer la dérivée f_n' de la fonction f_n. En déduire que la fonction f_n admet un maximum global sur son domaine de définition, dont on donnera la valeur. Quelles sont les limites de l'abscisse et de la valeur du maximum lorsque n tend vers $+\infty$?
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to -1} f_n'(x)$. Que peut-on en déduire sur la courbe $\mathcal{C}_n$?
4. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ admettent deux points communs que l'on précisera, ainsi qu'une asymptote horizontale commune.
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_n$ en son point d'abscisse 0.
6. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_n$ et de $\mathcal{C}_{n+1}$.
7. Tracer dans un même repère une allure des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.