Interrogation Écrite n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

19 mai 2015

Exercice 1

1. On a simplement $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Calculons donc $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -4 & 9 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, puis on constate bien que $M^2 = -2M + 3I$. On peut alors écrire $M(M+2I) = 3I$, soit $M^{-1} = \dfrac{1}{3}(M+2I) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Commençons par résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & - & z & = & x \\ 2x & - & 3y & - & 2z & = & y \\ x & - & 2y & & & = & z \end{array}\right.$. Les trois équations sont en fait identiques, et se résument à l'unique condition $z = x - 2y$, on peut donc écrire $F = \mathrm{Vect}((1,0,1);(0,1,-2))$. Ensuite, on résout $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & - & z & = & -3x \\ 2x & - & 3y & - & 2z & = & -3y \\ x & - & 2y & & & = & -3z \end{array}\right.$. La deuxième équation donne immédiatement $z = x$, et la dernière devient alors $4x - 2y = 0$, soit $y = 2x$. On intègre ces conditions dans la première équation pour trouver $0 = 0$, ce qui est toujours vérifié. Autrement dit, $G = \mathrm{Vect}((1,2,1))$.

4. Considérons la famille $\mathcal{B} = ((1,0,1);(0,1,-2);(1,2,1))$. Il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}^3$ car on ne peut clairement pas écrire $(1,2,1) = a(1,0,1) + b(0,1,-2) = (a, b, a-2b)$. Dans cette base, la matrice de f devient $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, puisque chacun des trois vecteurs de la base est vecteur propre de f, pour les valeurs propres respectives 1, 1 et -3.

5. La matrice de passe de la base canonique vers $\mathcal{B}$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Pour avoir la matrice de passage dans l'autre sens, il faut inverser la matrice P, par exemple en résolvant le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & a \\ & & y & + & 2z & = & b \\ x & - & 2y & + & z & = & c \end{array}\right.$. La soustraction des deux dernières lignes donne $2y = a - c$, soit $y = \dfrac{1}{2}a - \dfrac{1}{2}c$. On a ensuite $z = \dfrac{1}{2}b - \dfrac{1}{2}y = -\dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{2}b + \dfrac{1}{4}c$, et enfin $x = a - z = \dfrac{5}{4}a - \dfrac{1}{2}b - \dfrac{1}{4}c$. On en déduit que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Manifestement, si on arrive à comprendre l'énoncé, $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$. Il y a au total $4^4 = 256$ tirages possibles. Parmi ceux-ci, seuls 4 correspodantes à l'événement $X = 1$ (il faut tirer quatre fois la même boule, il suffit donc de choisir la boule), soit $P(X = 1) = \frac{1}{64}$. La valeur la plus simple à calculer ensuite est $P(X = 4) = \frac{4!}{256} = \frac{6}{64}$ (on ne s'embêtera pas à simplifier plus pour garder le même dénominateur partout), puisque dans ce cas, il faut tirer les quatre boules, il ne reste plus qu'à choisir l'ordre. Essayons de justifier la probabilité donnée par l'énoncé pour $X = 3$: il faut donc tirer une même boule deux fois, deux autres boules une seule fois. On choisit le numéro apparaissant deux fois (quatre possibilités), les tirages où ce numéro a été choisi ($\binom{4}{2} = 6$ possibilités), puis le numéro tiré lors du premier tirage restant (trois choix), et enfin le dernier numéro (deux choix), soit $4 \times 6 \times 3 \times 2 = 144$ tirages, et donc $P(X = 3) = \frac{36}{64}$. Si on en est courageux, on peut tenter de retrouver $P(X = 2)$ sans passer au complémentaire. On aura $X = 2$ si on ne tire que deux boules distinctes. Choisissons les deux boules qui vont sortir : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités. Il y a ensuite $2^4 = 16$ tirages où ne vont apparaitre que ces deux boules, auxquels il faut enlever les deux tirages où on tire tout le temps la même (soit l'une, soit l'autre), ce qui laisse $6 \times 14 = 84$ tirages, et $P(X = 2) = \frac{21}{64}$ (on vérifie sans peine que la somme des probabilités obtenues vaut 1) :

k	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{36}{64}$	$\frac{6}{64}$

Il ne reste plus qu'à calculer : $E(X) = \frac{1 + 42 + 108 + 24}{64} = \frac{175}{64}$ (non, ça ne se simplifie pas), donc $E(X)^2 = \frac{30\ 625}{4\ 096}$; et $E(X^2) = \frac{1 + 84 + 324 + 96}{64} = \frac{505}{64} = \frac{32\ 320}{4\ 096}$. La formule de König-Huygens nous permet de conclure que $V(X) = \frac{1\ 695}{4\ 096}$, et bien entendu $\sigma(X) = \frac{\sqrt{1\ 695}}{64}$.