# Interrogation Écrite n°6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

30 mars 2015

## Exercice 1

1. $e^{x+x^2} = 1 + x + x^2 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{2} + x^3 + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4) = 1 + x + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{7}{6}x^3 + \dfrac{25}{24}x^4 + o(x^4)$.
2. $\dfrac{\ln(1+x)}{1-x} = \left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + o(x^4)\right)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)) = x + x^2 + x^3 + x^4 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{3} - \dfrac{x^4}{4} + o(x^4) = x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{6}x^3 + \dfrac{7}{12}x^4 + o(x^4)$.
3. $\cos\left(\sin\left(\dfrac{x}{1-x}\right)\right) = \cos\left(\sin\left(x(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3))\right)\right) = \cos\left(\sin\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)\right)\right) = \cos\left(x + x^2 + x^3 + x^4 - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^4}{2} + o(x^4)\right) = \cos\left(x + x^2 + \dfrac{5}{6}x^3 + \dfrac{1}{2}x^4\right) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x^4 - x^3 - \dfrac{5}{6}x^4 + \dfrac{1}{24}x^4 + o(x^4) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 - x^3 - \dfrac{31}{24}x^4 + o(x^4)$.
4. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{1+x}} = e^{(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3))(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3))} = e^{x - x^2 + x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$ $= e^{x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3)} = 1 + x - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{11}{6}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x^3 + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3) = 1 + x - x^2 + \dfrac{1}{2}x^3 + o(x^3)$.

## Exercice 2

1. $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 - \dfrac{5}{128}x^4 + o(x^4)$.
2. $f(h) = \dfrac{1}{h} \times \sqrt{(1+h)^4 - (1+h)^3 - (1+h) + 1}$
$= \dfrac{1}{h} \times \sqrt{1 + 4h + 6h^2 + 4h^3 + h^4 - 1 - 3h - 3h^2 - h^3 - 1 - h + 1} = \dfrac{1}{h} \times \sqrt{3h^2 + 3h^3 + h^4} = \sqrt{3 + 3h + h^2} = \sqrt{3}\left(1 + h + \dfrac{h^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\left(1 + \dfrac{1}{2}h + \dfrac{1}{6}h^2 - \dfrac{1}{8}h^2 - \dfrac{1}{12}h^3 + \dfrac{1}{16}h^3 + o(h^3)\right) = \sqrt{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2}h + \dfrac{\sqrt{3}}{24}h^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{48}h^3 + o(h^3)$. On en déduit qu'on peut prolonger $f$ en 1 en posant $f(1) = \sqrt{3}$, qu'elle y admet une tangente d'équation $y = \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-1) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(x+1)$, et que la courbe sera localement au-dessus de la tangente.
3. On écrit $f(X) = \dfrac{1}{\frac{1}{X} - 1}\sqrt{\dfrac{1}{X^4} - \dfrac{1}{X^3} - \dfrac{1}{X} + 1} = \dfrac{X}{1-X} \times \dfrac{\sqrt{1 - X - X^3 + X^4}}{X^2}$
$= \dfrac{1}{X(1-X)}\sqrt{1 - X - X^3 + X^4} = \dfrac{1}{X}\left(1 + X + X^2 + o(X^2)\right)\left(1 - \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{8}X^2 + o(X^2)\right) = \dfrac{1}{X}\left(1 + X + X^2 - \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{1}{8}X^2 + o(X^2)\right) = \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8}X + o(X)$, soit $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. La courbe admet donc en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$, et sera localement située au-dessus de son asymptote.

4. On constate que $x^4-x^3-x+1 = x^3(x-1)-(x-1) = (x-1)(x^3-1) = (x-1)(x-1)(x^2+x+1)$, donc $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$. On peut donc écrire $f(g) = \sqrt{(1+h)^2+1+h+1} = \sqrt{3+3h+h^2}$, et terminer le calcul comme tout à l'heure.