Interrogation Écrite n°4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

18 décembre 2014

1. Commençons par calculer $|1+i| = \sqrt{2}$, puis par écrire $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

   On en déduit que $|(1+i)^7| = \sqrt{2}^7 = 8\sqrt{2}$, et que $\arg((1+i)^7) \equiv \frac{7\pi}{4}[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$. Les plus bourrins pourront aussi écrire $(1+i)^7 = 1 + 7i - 21 - 35i + 35 + 21i - 7 - i = 8 - 8i$, et concluront facilement ensuite.

2. Brutalement, $\sin^2(x)\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$
   $= -\frac{(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix})(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix})}{32} = -\frac{e^{5ix} + e^{3ix} - 2e^{ix} - 2e^{-ix} + e^{-3ix} + e^{-5ix}}{32}$
   $= \frac{1}{8}\cos(x) - \frac{1}{16}\cos(3x) - \frac{1}{16}\cos(5x)$.
   On en déduit $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\sin^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}\cos(x) - \frac{1}{16}\cos(3x) - \frac{1}{16}\cos(5x)\,dx$
   $= \left[\frac{1}{8}\sin(x) - \frac{1}{48}\sin(3x) - \frac{1}{80}\sin(5x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{48} - \frac{1}{80} = \frac{7}{48} - \frac{1}{80} = \frac{35-3}{240} = \frac{2}{15}$.

3. Les plus observateurs remarqueront que 1 est racine évidente de l'équation, qui se factorise donc trivialement sous la forme $(z-1)(z-2-2i) = 0$, et a donc pour solutions 1 et $2+2i$. Les autres calculeront $\Delta = (3+2i)^2 - 4(2+2i) = 9 + 12i - 4 - 8 - 8i = -3 + 4i$, et chercherons un $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = a^2 - b^2 + 2iab = \Delta$. On a donc les deux équations $a^2 - b^2 = -3$ et $2ab = 4$, auxquelles on ajoute la condition sur le module $|\delta|^2 = a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. La somme des deux équations extrêmes donne $2a^2 = 2$, soit $a = \pm 1$, leur différence donne $2b^2 = 8$, soit $b = \pm 2$, et comme a et b doivent être de même signe pour satisfaire la deuxième équation, on peut donc choisir $\delta = 1 + 2i$, et en déduire les deux solutions de notre équation : $z_1 = \frac{3 + 2i + 1 + 2i}{2} = 2 + 2i$, et $z_2 = \frac{3 + 2i - 1 - 2i}{2} = 1$.

4. La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$. On peut calculer son discriminant $\Delta = 1 - 1 = 0$, ou constater directement que $\frac{1}{2}$ en est une racine double. La suite a donc un terme général de la forme $u_n = \frac{A + Bn}{2^n}$, avec au vu des conditions initiales $u_0 = 2 = A$, et $u_1 = -1 = \frac{A+B}{2}$, donc $B = -2A = -4$. On en déduit que $u_n = \frac{2 - 4n}{2^n} = \frac{1 - 2n}{2^{n-1}}$.