Interrogation Écrite n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

7 septembre 2014

1. $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\ dx = [\sqrt{1+x^2}]_0^1 = \sqrt{2}-1$.
2. On procède par IPP pour I_2 en posant $u(x) = \ln(x)$ pour avoir $u'(x) = \frac{1}{x}$, et $v'(x) = x$ qui donne $v(x) = \frac{x^2}{2}$. On obtient alors $I_2 = \int_1^{e^2} x\ln(x)\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{x}{2}\ dx = \frac{e^4}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{e^2} = \frac{e^4}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^4+1}{4}$.
3. Faisons donc ce qui nous est proposé en posant $t = 1+\sqrt{x}$, soit $x = (t-1)^2$. Les bornes de l'intégrale deviennent alors 1 et 2, et on a par ailleurs $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx$, ou si on préfère $dx = (2t-2)dt$. On trouve alors $I_3 = \int_1^2 \frac{(t-1)^2}{t}(2t-2)\ dt = \int_1^2 \frac{2(t^3-3t^2+3t-1)}{t}\ dt = \int_1^2 2t^2 - 6t + 6 - \frac{2}{t}\ dt = \left[\frac{2}{3}t^3 - 3t^2 + 6t - 2\ln(t)\right]_1^2 = \frac{16}{3} - 12 + 12 - 2\ln(2) - \frac{2}{3} + 3 - 6 = \frac{14}{3} - 3 - 2\ln(2) = \frac{5}{3} - 2\ln(2)$.
4. Pour I_4, il faut faire une IPP en intagrant le $\frac{1}{\cos^2}$, dont on sait bien que c'est la dérivée de la tangente. On pose donc $u(x) = x$, soit $u'(x) = 1$, et $v'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ pour avoir $v(x) = \tan(x)$, ce qui donne $I_4 = [x\tan(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\ dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ dx = \frac{\pi}{4} + [\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$.
5. On n'échappera pas à une décomposition en éléments simples : pas de calculs pour la décomposition du dénominateur qui s'écrit directement $x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$. On peut donc écrire $\frac{1}{x^4-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$. Pour trouver a, on peut tout multiplier par $x+1$ puis évaluer en $x=-1$: $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = a + \frac{b(x+1)}{x-1} + \frac{(cx+d)(x+1)}{x^2+1}$, donc $-\frac{1}{4}$. De même, on trouve $b = \frac{1}{4}$ (si on était savants, on invoquerait la parité pour ne même pas faire le calcul de b). En posant $x=0$ dans l'égalité de départ, $-1 = a-b+d$, donc $d = -1-a+b = -\frac{1}{2}$. Enfin, en multipliant tout par x, on a $\frac{x}{x^4-1} = \frac{ax}{x+1} + \frac{bx}{x-1} + \frac{cx^2+dx}{x^2+1}$, et en prenant la limite en $+\infty$ on trouve $0 = a+b+c$, donc $c = -a-b = 0$. Finalement, $\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}$, puis $I_5 = \frac{1}{4}[\ln(1-x)]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \frac{1}{4}[\ln(x+1)]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \frac{1}{2}[\arctan(x)]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{4}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)\right) - \frac{\pi}{12} =$

$\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)-\frac{\pi}{12}$ (on va raisonnablement s'arrêter là).