Interrogation Écrite n°2

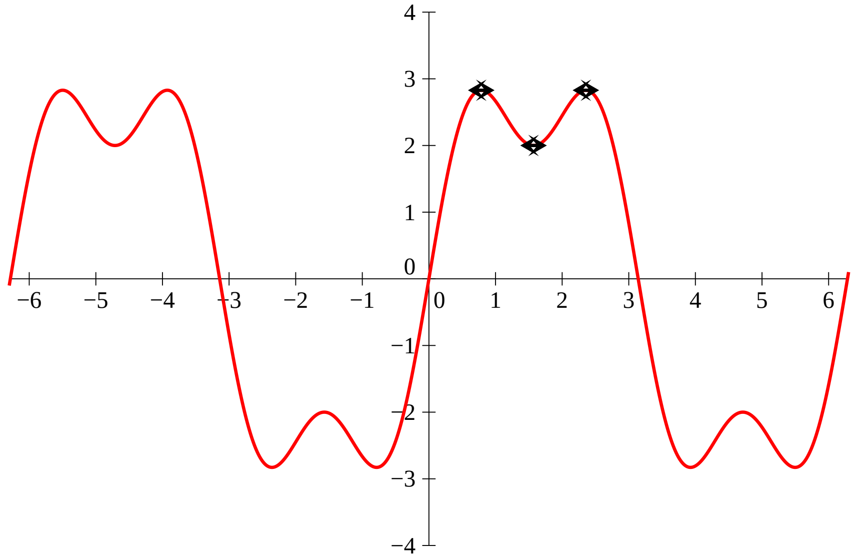
PTSI B Lycée Eiffel

30 septembre 2014

1. Cf cours.
2. Cf cours.
3. On peut tout multiplier par $\cos(x)$ pour obtenir l'équation équivalente $\sin(x)\cos(x)+\cos^2(x) = \cos(x)+\sin(x)$, soit $\cos(x)(\sin(x)+\cos(x)) = \sin(x)+\cos(x)$, ou encore $(\sin(x)+\cos(x))(\cos(x)-1) = 0$. Il y a donc deux possibilités : soit $\cos(x) = 1$, ce qui se produit quand $x \equiv 0[\pi]$; soit $\cos(x) = -\sin(x) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Cela se produit si $x \equiv x+\frac{\pi}{2}[2\pi]$ (clairement impossible), ou si $x \equiv -x-\frac{\pi}{2}[2\pi]$, soit $x \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$ (valeurs qu'on pouvait facilement deviner à partir du cercle trigonométrique). Aucune des solutions obtenues ne pose problème pour la définition de la tangente, tous les angles de la forme $k\pi$ ou $k\pi - \frac{\pi}{4}$ sont donc solutions de l'équation.
4. La fonction f est évidemment définie sur $\mathbb{R}$. Elle est impaire comme somme de deux sinus, et 2π-pétiodique (on ne peut pas faire mieux. On peut donc se contenter de l'étudier sur $[0,\pi]$ avant de compléter la courbe par symétrie par rapport à l'origine puis par périodicité. Notre fonction est dérivable, de dérivée $f'(x) = 3\cos(3x)+3\cos(x)$. Plusieurs possibilités pour étudier le signe de cette dérivée, on peut par exemple utiliser une transformation somme-produit pour écrire $f'(x) = 3\cos(2x)\cos(x)$. Sur l'intervalle $[0,\pi]$, $\cos(x)$ change de signe en $\frac{\pi}{2}$, et $\cos(2x)$ s'annule en $\frac{\pi}{4}$ et en $\frac{3\pi}{4}$, ce qui permet de dresser le tableau de variations suivant (les calculs de valeurs ne posent pas de problème) :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\cos(2x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	3	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	-3
f	0	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0

On conclut avec la belle courbe suivante :


4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6