Interrogation Écrite n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

12 septembre 2014

1. Cf. cours.
2. Je n'aime pas les frites, donc je ne suis pas belge.
3. On commence par tout faire passer à gauche, puis un fait un tableau de signe : $\dfrac{x^2+2x-3}{x-3} < 0$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$. Le dénominateur s'annule en 3, d'où le tableau :

x		-3		1		3	
x^2+2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x^2+2x-3}{x-3}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

   Conclusion : $\mathcal{S} =]-\infty, -3[\cup]1, 3[$.
4. Les deux valeurs absolues sont égales si et seulement les expressions qui sont à l'intérieur sont égales ou opposées. Il faut donc résoudre deux équations : commençons par $x^3 + x^2 - x + 1 = x^3 + 2x^2 + x - 2$, soit $x^2 + 2x - 3 = 0$. C'est la même équation que pour le numérateur de la question précédente, elle a pour solutions 1 et -3. Deuxième équation à résoudre : $x^3+x^2-x+1 = -x^3-2x^2-x+2$, ce qui donne l'équation du troisième degré $2x^3+3x^2-1 = 0$. On trouve comme racine évident $x = -1$ (puisque $2(-1)^3+3(-1)^2-1 = -2+3-1 = 0$), on peut donc factoriser sous la forme $2x^3+3x^2-1 = (x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+1$. Par identification des coefficients, on obtient les conditions $a = 2$; $a+b = 3$, donc $b = 1$; $b+c = 0$ donc $c = -1$, ce qui est confirmé par la dernière condition. Notre équation se ramène donc à $(x+1)(2x^2+x-1) = 0$. Le deuxième facteur à gauche a pour discriminant $\Delta = 1+8 = 9$ et admet comme racines $x_3 = \dfrac{-1-3}{4} = -1$ (qu'on obtient donc deux fois), et $x_4 = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2}$. Il y a donc quatre solutions disctinctes à notre équation initiale : $\mathcal{S} = \left\{-3, -1, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$.