Demi-DS n°9 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

16 juin 2015

Exercice 1

1. Calculons donc : $u_1 = \frac{3}{2}\ln(2) - 1$, puis $u_2 = \frac{5}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = \frac{5}{2}\ln(3) - \frac{5}{2}\ln(2) - 1$ et $u_3 = \frac{7}{2}\ln(4) - \frac{7}{2}\ln(3) - 1 = 7\ln(2) - \frac{7}{2}\ln(3) - 1$. On en déduit $S_1 = u_1 = \frac{3}{2}\ln(2) - 1$, puis $S_2 = S_1 + u_2 = \frac{5}{2}\ln(3) - \ln(2) - 2$ et $S_3 = S_2 + u_3 = 6\ln(2) - \ln(3) - 3$. On finit avec la suite (v_n) : $v_2 = e^{1-S_1} = e^{2-\frac{3}{2}\ln(2)} = \frac{2^2}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^2}{2\sqrt{2}}$; puis $v_3 = e^{3+\ln(2)-\frac{5}{2}\ln(3)} = \frac{2e^3}{9\sqrt{3}}$, et enfin $v_4 = e^{4+\ln(3)-6\ln(2)} = \frac{3e^4}{64}$.
2. Il faut bien évidemment être très soigneux dans son calcul d'équivalent, et écrire des o pour ne pas prendre le risque d'additionner les équivalents. En fait, on a besoin de pousser le développement limité du ln à l'ordre 3 pour obtenir l'équivalent demandé. On écrit donc $u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 \sim \frac{1}{12n^2}$. La série (S_n) a donc un terme général équivalent à celui d'une série de Riemann convergente, elle converge nécessairement. La suite (S_n) a donc une limite finie, et (v_n) également. On peut ajouter que la limite de (v_n) est forcément un réel strictement positif (exponentielle d'un réel quelconque).
3. Procédonc par exemple par récurrence, en notant P_n la propriété : $S_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n + 1) - n - \ln(n!)$. Au rang 1, on vérifie que $\frac{3}{2}\ln(2) - 1 - \ln(1) = S_1$, c'est le cas. Supposons désormais la formule vérifiée au rang n, alors $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n + 1) - n - \ln(n!) + \left(n + \frac{3}{2}\right)\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - 1 = \left(n + \frac{3}{2}\right)\ln(n + 2) - \ln(n + 1) - (n + 1) - \ln(n!) = \left(n + \frac{3}{2}\right) - (n + 1) - \ln((n + 1)!)$, ce qui prouve P_{n+1}. La propriété est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$.
4. D'après la question précédente, $S_{n-1} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln(n) - n + 1 - \ln((n - 1)!)$, donc $v_n = e^{1-S_{n-1}} = e^{n+\ln((n-1)!)-(n+\frac{1}{2})\ln(n)} = \frac{e^n \times (n-1)!}{n^{n-\frac{1}{2}}} = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ (en multipliant numérateur et dénominateur par n).
5. Puisqu'on sait que (v_n) admet une limite l strictement positive, on peut écrire $v_n \sim l$, soit $\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \sim l$, ce qui revient à dire que $n! \sim l\sqrt{n}n^ne^{-n}$.

Exercice 2

1. La série (H_n) est la série harmonique, série divergente vérifiant $H_n \sim \ln(n)$.
2. On a encore besoin d'un petit développement limité : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n(1+\frac{1}{n})} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} \times \left(1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = -\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Cette expression est donc équivalente au termne général d'une série de Riemann convergente, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge donc. Cela revient exactement à dire que $(u_{n+1} - u_n)$ converge.
3. Il suffit de constater que $v_{n+1} - v_n$ pour affirmer que $v_{n+1} - v_n \sim -\dfrac{1}{2n^2}$, et conclure comme précédemment.
4. Notons $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} v_{k+1} - v_k$ en utilisant le théorème cité dans l'énoncé, on a donc $R_n \sim \displaystyle\int_n^{+\infty} -\frac{1}{2t^2}\,dt = \left[\frac{1}{2t}\right]_n^{+\infty} = -\frac{1}{2n}$ (on a rédigé sans écrire les limites, les plus rigoureux feront ce qu'il faut pour l'éviter). Or, on sait très bien calculer la somme télescopique $R_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n - v_n$. On sait tout autant que (v_n) tend vers 0 puisque, par définition, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \gamma$. On en déduit donc que $v_n = -R_n \sim \dfrac{1}{2n}$.
5. Reprenons le résultat précédent : $v_n = u_n - \gamma = \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc $u_n = \gamma + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, et enfin $H_n = \ln(n) + u_n = \ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Ceux qui ont du temps à perdre continueront les calculs pour avoir les termes suivants de ce développement asymptotique.

Exercice 3

1. Pas vraiment besoin de calculs pour se rendre compte que $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon 2. Pour le deuxième cercle, on écrit son équation sous la forme $(x-4)^2 - 16 + y^2 + 15 = 0$, soit $(x-4)^2 + y^2 = 1$. Il s'agit donc du cercle de centre $O'(4,0)$ et de rayon 1.
2. Pas besoin de se fatiguer : $OO' = 4$ (calcul extrêmement difficile) et $R + R' = 3$, il n'y a pas d'intersection.
3. Notons (x, y) les coordonnées d'un point I vérifiant cette condition, on a alors $-x = 2(4-x)$ et $-y = -2y$, soit $x = 8$ et $y = 0$. L'unique point cherché est donc $I(8, 0)$.
4. L'équation donnée est bien une équation de droite, et elle passe par le point M puisque $a^2 + b^2 - 4 = 0$ si M appartient au cercle $\mathcal{C}$. De plus, elle admet pour vecteur normal le vecteur de coordonnées (a, b), qui n'est autre que le vecteur $\overrightarrow{OM}$. La droite est donc bien tangente au cercle au point M.
5. Ce point $A(x, y)$ vérifie d'une part $x^2 + y^2 = 4$, et d'autre part $8x - 4 = 0$ (en remplaçant les coordonnées du point I dans l'équation de la tangente qu'on vient d'obtenir), soit $x = \dfrac{1}{2}$, puis $y^2 = 4 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{15}{4}$. L'énoncé nous impose de choisir $y = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$, et donc $A\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$.
6. Ce projeté orthogonal $H(x, y)$ appartient par définition à la droite (AI), donc à la tangente à $\mathcal{C}$ au point A. En multipliant par 2 l'équation obtenue à la question 4, on trouve la première condition $x + \sqrt{15}y = 8$. De plus, on doit avoir $\overrightarrow{O'H}.\overrightarrow{AI} = 0$, avec $\overrightarrow{O'H}(x-8, y)$, et $\overrightarrow{AI}\left(\dfrac{15}{2}, -\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$. Quitte à multiplier une nouvelle fois tout par 2, on trouve la deuxième

condition $15(x-4)-\sqrt{15}y=0$, soit $15x-\sqrt{15}y=60$. La somme des deux équations obtenues donne immédiatement $16x=68$, soit $x=\dfrac{17}{4}$, et on en déduit $y=\dfrac{8-x}{\sqrt{15}}=\dfrac{15}{4\sqrt{15}}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Autrement dit, $H\left(\dfrac{17}{4};\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$.

7. Cette distance n'est autre que la distance $O'H=\sqrt{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{15}{16}}=1$. Cette distance étant la même que le rayon du cercle $\mathcal{C}'$, le point H appartient donc à ce cercle, et la droite (AI) est aussi tangente au cercle $\mathcal{C}'$.
8. Concluons donc joliment :