Demi-DS n°9

PTSI B Lycée Eiffel

16 juin 2015

Exercice 1

Dans cet exercice, on pose, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$, puis $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et enfin $v_n = e^{1 - S_{n-1}}$.

1. Calculer les trois premiers termes de chaque suite.
2. Déterminer un équivalent simple de (u_n), et en déduire la convergence de (S_n). Que peut-on dire de la suite (v_n) ?
3. Montrer que $S_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) - n - \ln(n!)$.
4. En déduire une expression de (v_n) en fonction de n.
5. Conclure que $n! \sim l \times n^n e^{-n} \sqrt{n}$, où l est une constante strictement positive.

Exercice 2

On note dans cet exercice $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Rappeler ce qu'on a vu en cours concernant la série (H_n).
2. On pose dans cette question $u_n = H_n - \ln(n)$. Donner un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est une série convergente. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ? On notera désormais $\gamma = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
3. On pose maintenant $v_n = u_n - \gamma$. Déterminer un équivalent simple de $v_{n+1} - v_n$, puis prouver la convergence de $\sum v_{n+1} - v_n$.
4. On admet le résultat suivant : si a_n est le terme général d'une série convergente, et si $a_n = f(n)$, où f est une fonction continue au voisinage de $+\infty$, alors $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \sim \int_k^{+\infty} f(t)\ dt$ (l'intégrale infinie étant calculée comme limite d'une intégrale finie quand la borne tend vers $+\infty$). Appliquer ce résultat pour obtenir un équivalent simple de v_n.
5. En déduire un développement asymptotique à trois termes de H_n.

Exercice 3

On considère dans le plan les deux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ d'équation respective $x^2+y^2-4=0$, et $x^2+y^2-8x-15=0$.

1. Déterminer les centre O et O', ainsi que les rayons R et R' de ces deux cercles.
2. Déterminer les points d'intersection éventuels des deux cercles.
3. Vérifier qu'il existe un unique point I vérifiant $\overrightarrow{IO} = 2\overrightarrow{IO'}$, et déterminer ses coordonnées.
4. Soit $M(a,b)$ un point quelconque du cercle $(\mathcal{C})$. Prouver l'équation $ax+by-4=0$ est celle de la tangente en A à $\mathcal{C}$.
5. Déterminer les coordonnées du seul point $A \in (\mathcal{C})$ d'ordonnée positive, pour lequel la tangente en A à $(\mathcal{C})$ passe par I.
6. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point O' sur la droite (AI).
7. Calculer la distance de O' à la droite (AI). Que peut-on en déduire ?
8. Vous n'y échapperez pas : faire un joli desssin !