Demi-DS n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

14 avril 2015

Exercice 1

1. Commençons par prouver que f est une application linéaire : quels que soient les polynomes P et Q appartenant à E et le réel λ, on a $f(\lambda P+Q) = \dfrac{X^2-1}{2}(\lambda P+Q)'' - X(\lambda P+Q)' + \lambda P + Q = \lambda\dfrac{X^2-1}{2}P'' - \lambda XP' + \lambda P + \dfrac{X^2-1}{2}Q'' - XQ' + Q = \lambda f(P) + f(Q)$. Prouvons maintenant que $f(P)$ appartient toujours à E quand P appartient à E (on va calculer explicitement l'image d'un polynôme de E, ça servira pour la suite) : si $P = a + bX + cX^2 + dX^3$, alors $f(P) = \dfrac{X^2-1}{2}(2c+6dX) - X(b+2cX+3dX^2) + a + bX + cX^2 + dX^3 = a - c - 3dX + dX^3$, qui appartient bien à E. L'application f est donc un endomorphisme de E.
2. Pour le noyau, on a calculé tout ce qu'il faut précédemment : $P \in \ker(f)$ si $a - c = d = 0$, soit $P = a + bX + aX^2$, donc $\ker(f) = \mathrm{Vect}(X^2+1, X)$. En particulier, $\dim(\ker(f)) = 2$. On peut déjà en déduire, en appliquant le théorème du rang, que $\mathrm{rg}(f) = 2$. Calculons les images des polynômes de la base canoniques : $f(1) = 1$; $f(X) = 0$; $f(X^2) = -1$ et $f(X^3) = X^3 - 3X$. On en déduit aisément que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(1, X^3 - 3X)$, ce qui confirme que $\mathrm{rg}(f) = 2$.
3. Les deux sous-espaces étant de dimension 2, il suffit par exemple de prouver que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Supposons donc que P appartienne à la fois au noyau et à l'image, alors $P = a(X^2+1) + bX$, et $P = c + d(X^3 - 3X)$. En particulier, $aX^2 + bX + a = dX^3 - 3dX + c$, ce qui implique immédiatement $d = 0$, $a = 0$ et $c = a$, donc $P = 0$. Les deux sous-espaces sont bien supplémentaires.
4. Calculons donc $f^2(P)$ (avec les coordonnées) : on sait que $f(P)$ a pour coefficients $a' = a - c$, $b' = -3d$, $c' = 0$ et $d' = d$, donc $f^2(P) = a' - c' - 3d'X + d'X^3 = a - c - 3dX + dX^3 = f(P)$. On a donc $f^2 = f$, ce qui prouve que f est un projecteur (sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$, comme il se doit).

Exercice 2

1. C'est trivial ! Plus sérieusement, il n'y a que la linéarité à prouver : $f(\lambda x+x'; \lambda y+y'; \lambda z+z') = \lambda f(x,y,z) + f(x',y',z')$ par un calcul à la portée de la première grand-mère venue.
2. Pour le noyau, on va résoudre bêtement le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} -x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & 2z & = & 0 & \\ -2x & - & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$. Pour une fois, on va procéder par substitution, ça changera : on a $x = 2y + 2z$, ce qui donne, en remplaçant dans les deux dernières équations, $5y + 4z = 2y + 3z = 0$. Les deux équations n'étant pas proportionnelles, elles ne sont vérifiées que si $y = z = 0$, dont on déduit $x = 0$. Autrement dit, le noyau de f est réduit au vecteur nul, et l'application f est injective. Étant un endomorphisme dans un espace vectoriel de dimension finie, c'est alors nécessairement un isomorphisme, elle est donc surjective et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

3. Il faut résoudre le premier système $\begin{cases} -x & - & 2y & - & 2z & = & x \\ 2x & + & 3y & 2z & = & y \\ -2x & - & 2y & - & z & = & z \end{cases}$. Les trois équations se ramènent à la même condition unique $x+y+z=0$, donc $\ker(f-\text{id}) = \{(x,y,-x-y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1,0,-1);(0,1,-1))$. En particulier, $\dim(\ker(f-\text{id})) = 2$. Pour le deuxième sous-espace, il faut résoudre le système $\begin{cases} -x & - & 2y & - & 2z & = & -x \\ 2x & + & 3y & 2z & = & -y \\ -2x & - & 2y & - & z & = & -z \end{cases}$. Les deux équations extrêmes donnent $z=-y$ et $x=-y$, et la deuxième devient alors $-2y+4y-2y=0$, qui est toujours vérifiée, donc $\ker(f+\text{id}) = \{(-y,y,-y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1,-1,1))$. En particulier, $\dim(G)=1$.
4. Puisque $\dim(F)+\dim(G)=3$, il suffit de vérifier en plus que $F \cap G = \{0\}$. C'est en fait trivial : par définition, si $u \in F$, $f(u)=u$; et si $u \in G$, $f(u)=-u$. Ces deux conditions impliquent $u=-u$, donc $u=0$. Les sous-espaces $\ker(f-\text{id})$ et $\ker(f+\text{id})$ étant supplémentaires, f est la symétrie par rapport à F parallèlement à G. On vérifie sans problème que $f \circ f(x,y,z) = (x,y,z)$ si on le souhaite.
5. Si on se souvient bien de son cours, on sait qu'en notant p la projection sur F parallèlement à G, on a $f = 2p - \text{id}$, soit $p = \dfrac{f+\text{id}}{2}$. On peut donc écrire $p(x,y,z) = \dfrac{1}{2}f(x,y,z) + \dfrac{1}{2}(x,y,z) = (-y-z; x+2y+z; -x-y)$.

Exercice 3

1. Commençons par le commencement : $f_0(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1+\frac{x}{2}} \times \dfrac{\ln(1+x)}{x}$
$= \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}x^2\right)\left(1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}x^2\right) + o(x^2) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}x^2 + o(x^2)\right)$, soit $f_0(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{12}x^2 + o(x^2)$. Pour obtenir le développement limité de f_1, on ne va pas tout refaire, il suffit de constater que $f_1(x) = (1+x)f_0(x) = (1+x)\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{12}x^2 + o(x^2)\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{12}x^2 + o(x^2)$. Il ne reste plus qu'à généraliser, en étalant sa science, à savoir sa connaissance du binôme de Newton (ou plus simplement du développement limité en 0 de $(1+x)^\alpha$) pour écrire $(1+x)^n = 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2 + o(x^2)$. On en déduit que
$f_n(x) = (1+x)^n f_0(x) = \left(1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2 + o(x^2)\right)\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{12}x^2 + o(x^2)\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{12}x^2 + \dfrac{n}{2}x - \dfrac{n}{2}x^2 + \dfrac{n(n-1)}{4}x^2 + o(x^2) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{n-1}{2}x + \dfrac{3n^2-9n+5}{12}x^2 + o(x^2)$.
2. Manifestement, on peut toujours prolonger f_n par continuité en 0 en posant $f_n(0) = \dfrac{1}{2}$. La fonction prolongée est toujours dérivable, et $f_n'(0) = \dfrac{n-1}{2}$. La tangente correspondante a pour équation $y = \dfrac{n-1}{2}x + \dfrac{1}{2}$. Pour la position relative, il faut connaitre le signe de $3n^2 - 9n + 5$, qui a pour discriminant $\Delta = 81 - 60 = 21$, et s'annule en $x_1 = \dfrac{9-\sqrt{21}}{6} \in]0,1[$, et en $x_2 = \dfrac{9+\sqrt{21}}{6} \in]2,3[$. La courbe de f_n ne sera en-dessous de se tangente en 0 que si n est compris entre x_1 et x_2, c'est-à-dire pour $n=1$ ou $n=2$. Pour toutes les autres valeurs de n, la courbe sera localement au-dessus de sa tangente.
3. On sait que $\lim\limits_{x \to -1} x(2+x) = -1$. En posant $X = 1+x$, le numérateur peut s'écrire sous la forme $X^n \ln(X)$, avec X qui tend vers 0. Par croissance comparée, ce numérateur tend vers 0

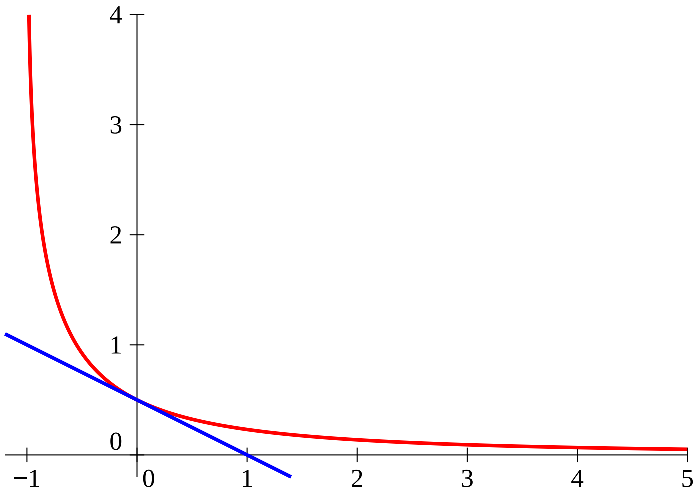
si $n \neq 0$, et f_n aussi. Si $n = 0$, on a trivialement $\lim\limits_{x \to -1} f_0(x) = +\infty$. Si $n \neq 0$, on prolonge en posant $f_n(-1) = 0$, donc $\dfrac{f_n(x) - f_n(-1)}{x+1} = \dfrac{(1+x)^{n-1}\ln(1+x)}{x(2+x)}$. Par le même raisonnement que ci-dessus, ce quotient a une limite infinie si $n = 1$, et tend vers 0 sinon. On en déduit que la fonction f_n prolongée en -1 y admet une tangente verticale lorsque $n = 1$, et une tangente horizontale si $n \geq 2$.

4. (a) Rappelons que $f_0(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x(2+x)}$, donc $f_0'(x) = \dfrac{\frac{x(2+x)}{1+x} - (2+2x)\ln(1+x)}{x^2(2+x)^2} = \dfrac{x+1}{x^2(x+2)^2} g_0(x)$, où $g_0(x) = \dfrac{x(2+x)}{(1+x)^2} - 2\ln(1+x) = \dfrac{2x+x^2}{1+2x+x^2} - 2\ln(1+x) = 1 - \dfrac{1}{(1+x)^2} - 2\ln(1+x)$.

   (b) Puisqu'on nous le propose si gentiment, redérivons la fonction g_0 pour obtenir $g_0'(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} - \dfrac{2}{1+x} = \dfrac{2(1-(1+x)^2)}{(1+x)^3} = \dfrac{-2x(x+2)}{(1+x)^3}$. Sur l'intervalle $]-1, +\infty[$, g_0' est du signe de $-2x$, donc g_0 est strictement croissante sur $]-1, 0]$, et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Or, $g_0(0) = 0$ (ça tombe bien), donc la fonction g_0 est toujours négative. Comme f_0' est du même signe que g_0 sur $]-1, +\infty[$, la fonction f_0 est décroissante sur cet intervalle. La seule limite restant à calculer pour compléter le tableau de variations est en $+\infty$, et une croissance comparée directe permet d'affirmer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = 0$. On peut donc dresser le tableau suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f_0'(x)$	$\|$	$-$	$-\frac{1}{2}$	$-$	
f_0	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

   (c) En tenant compte de tous les calculs, et notamment en traçant la tangente à la courbe en son point d'abscisse 0, on obtient l'allure suivante :



5. On veut donc étudier $f_1(x) = \dfrac{(1+x)\ln(1+x)}{x(x+2)}$. Utilisons la même méthode que ci-dessus : $f_1'(x) = \dfrac{x(x+2)(\ln(x+1)+1) - 2(1+x)^2\ln(x+1)}{x^2(2+x)^2} = \dfrac{x(x+2) - (x^2+2x+2)\ln(1+x)}{x^2(2+x)^2} = \dfrac{x^2+2x+2}{x^2(x+2)^2} g_1(x)$, où on a posé $g_1(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+2} - \ln(1+x) = 1 - \dfrac{2}{x^2+2x+2} - \ln(1+x)$. Il

ne reste plus qu'à dériver g_1 dans la joie et la bonne humeur : $g_1'(x) = \dfrac{2(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{4(x+1)^2 - (x^2+2x+2)^2}{(1+x)(x^2+2x+2)^2}$. Miracle, on peut utiliser une identité remarquable pour simplifier le numérateur puisqu'on a une différence de deux carrés : $g_1'(x) = \dfrac{-x^2(x^2+4x+4)}{(x+1)(x^2+2x+2)^2} = \dfrac{-x^2(x+2)^2}{(x+1)(x^2+2x+2)^2}$. Nouveau miracle, cette dérivée est trivialement négative sur $]-1, +\infty[$, ce qui prouve que g_1 y est décroissante. Or, $g_1(0) = 0$, donc $g_1(x)$ est du signe opposé à celui de x. On en déduit que f_1' aussi, puisque le facteur restant au numérateur a un discriminant négatif, et qu'il est donc toujours positif. Comme tout à l'heure, la seule limite qui reste à calculer est celle en $+\infty$, qui est toujours nulle par croissance comparée. On conclut avec un beau tableau :

x	-1		0		$+\infty$
$f_1'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	
f_1	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Puis une non moins belle courbe :