Devoir Surveillé n°6

PTSI B Lycée Eiffel

21 mars 2015

Exercice 1

1. Même si on ne connait pas les polynômes de Lagrange, on devrait se rendre compte que P_1 est un polynôme de degré ayant pour racines 3 et 5, donc que $P_1 = k(X-3)(X-5)$. La condition supplémentaire $P_1(1) = 1$ impose $1 = k \times (-2) \times (-4)$, soit $k = \frac{1}{8}$, et $P_1 = \frac{1}{8}(X-3)(X-5) = \frac{1}{8}X^2 - X + \frac{15}{8}$.
2. On utilise la même technique : $P_3 = k(X-1)(X-5)$, avec $P_3(3) = 1 = k \times 2 \times -2$, donc $k = -\frac{1}{4}$, et $P_3 = -\frac{1}{4}(X-1)(X-5) = -\frac{1}{4}X^2 + \frac{3}{2}X - \frac{5}{4}$; et $P_5 = k(X-1)(X-3)$, avec $P_5(5) = 1 = k \times 4 \times 2$, donc $k = \frac{1}{8}$, et $P_5 = \frac{1}{8}(X-1)(X-3) = \frac{1}{8}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{3}{8}$.
3. Supposons qu'une combinaison linéaire de ces trois polynômes soit nulle : $aP_1 + bP_3 + cP_5 = 0$. Quitte à tout multiplier par 8, cela revient à dire que $a(X^2-8X+15)-2b(X^2-6X+5)+c(X^2-4X+3) = 0$, soit $(a-2b+c)X^2+(-8a+12b-4c)X+15a-10b+3c = 0$. Les coefficients doivent être nuls tous les trois, il faut donc résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & - & 2b & + & c & = & 0 \\ -8a & + & 12b & - & 4c & = & 0 \\ 15a & - & 10b & + & 3c & = & 0 \end{array}\right.$ Pour une fois, procédons par substitution : $a = 2b - c$, on remplace dans les deux autres équations pour trouver $-4b + 4c = 0$ et $20b - 12c = 0$. Ces deux équations n'étant pas proportionnelles, la seule solution est $b = c = 0$, ce qui implique $a = 0$. La famille est bien libre. Note pour les malins : en fait, résoudre le système est facultatif, on peut remplacer X par 1, 3 et 5 pour trouver tout de suite $a = b = c = 0$ en exploitant la définition des trois polynômes.
4. C'est une famille libre de trois vecteurs dans l'espace E qui est de dimension 3, il s'agit nécessairement d'une base.
5. Il faut résoudre le système obtenu en écrivant $X^2 - 3X - 1 = aP_1 + bP_3 + cP_5$, soit $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & - & 2b & + & c & = & 8 \\ -8a & + & 12b & - & 4c & = & -24 \\ 15a & - & 10b & + & 3c & = & -8 \end{array}\right.$ (attention à ne pas oublier bêtement de multiplier par 8 les constantes à droite). On effectue la même substitution que tout à l'heure : $a = 2b - c + 8$, donc $-4b+4c = 40$ (ou si on préfère $c-b = 10$), et $20b-12c = -128$, soit $5b-3c = -32$. Allez, une deuxième substitution rien que pour le plaisir de ne pas du tout faire de pivot : $c = b+10$, donc $2b - 30 = -32$, et $b = -1$. On en déduit facilement $c = 9$ et $a = -3$. Autrement dit, les coordonnées recherchées sont $(-3, -1, 9)$.
6. On calcule aisément $Q(1) = -3$, $Q(3) = -1$ et $Q(5) = 9$, ce qui ne peut sûrement pas être une coïncidence. En fait, si on part de l'égalité $Q = aP_1 + bP_3 + cP_5$, il suffit de regarder ce que ça donne pour $X = 1$, $X = 3$ puis $X = 5$ pour trouver tout de suite $Q(1) = a$, $Q(3) = b$ et $Q(5) = c$.
7. (a) Pour écrire le calcul plus simplement (si on peut dire), développement $P_0 = X^3 - 9X^2 + 23X - 15$. Il ne reste plus qu'à faire un superbe calcul de division euclidienne :

$$
\begin{array}{rlllllllll|l}
 & X^5 & & & & & & & & & X^3-9X^2+23X-15 \\ \cline{11-11}
- & (X^5 & - & 9X^4 & + & 23X^3 & - & 15X^2) & & & X^2+9X+58 \\
 & & & 9X^4 & - & 23X^3 & + & 15X^2 & & & \\
 & & - & (9X^4 & - & 81X^2 & + & 207X^2 & - & 135X) & \\
 & & & & & 58X^3 & - & 192X^2 & + & 135X & \\
 & & & & - & (58X^3 & - & 522X^2 & + & 1\,334X \quad - \quad 870) & \\
 & & & & & & & 330X^2 & - & 1\,199X \quad + \quad 870 &
\end{array}
$$

On en déduit que $f(P) = 330X^2 - 1\ 199X + 870$. De qui se moque-t-on ? Il fallait vraiment faire un calcul aussi ignoble. Non, on peut aussi écrire $f(P) = aX^2 + bX + c$, avec $X^5 = Q(X)P_0(X) + aX^2 + bX + c$, puis regarder ce que ça donne pour $X = 1$, $X = 3$ et $X = 5$, les valeurs annulant P_0. On obtient les superbes équations $1 = a+b+c$ (ça va), $243 = 9a + 3b + c$ (moins sympa) et $3\ 125 = 25a + 5b + c$ (carrément moche). Ensuite, y a plus qu'à résoudre le système. Bon, c'est pas tellement mieux.

(b) C'est une conséquence immédiate du théorème de la division euclidienne : le reste de la division a un degré strictement inférieur au dividende, qui est ici de degré 3.

(c) Pour avoir $f(P) = 0$, il faut que P soit dévisible par P_0. Mais si P est lui-même de degré 3, il est forcément de la forme $P = kP_0$, pour un réel k quelconque.

(d) En fait, ce n'est pas dur : on sait que (P_1, P_3, P_5) est une base de E, donc $f(P) = aP_1 + bP_3 + cP_5$ (on sait que $f(P)$ appartient lui-même à E). Mais si on regarde une dernière fois ce que donne cette égalité lorsque $X = 1$, $X = 3$ ou $X = 5$, on trouve $a = f(P)(1)$, $b = f(P)(3)$ et $c = f(P)(5)$. Certes, mais comme P_0 lui-même s'annule pour ces valeurs de X, on a en fait $P(1) = f(P)(1)$, $P(3) = f(P)(3)$ et $P(5) = f(P)(5)$, ce qui prouve la formule annoncée.

Exercice 2

1. La fonction g est aussi définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et elle y est dérivable, avec $g'(x) = -\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{-2+5x-2x^2}{x^3}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur, qui a pour discriminant $\Delta = 25-16 = 9$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{-5+3}{-4} = \dfrac{1}{2}$, et $x_2 = \dfrac{-5-8}{-4} = 2$. De plus, $g(x) = \dfrac{1-5x-2x^2\ln(x)}{x^2}$, donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ (on utilise la croissance comparée pour affirmer que $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0$). De l'autre côté, aucun problème : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. On calcule par ailleurs $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4 - 10 + 2\ln(2) = 2(\ln(2)-3) < 0$, et $g(2) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{2} - 2\ln(2) = -\dfrac{9}{4} - 2\ln(2) < 0$. On peut dresser le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
g	‖ $+\infty$	$\searrow$	<0	$\nearrow$	<0	$\searrow$	$-\infty$

La fonction g est strictement négative sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, elle ne peut pas s'annuler sur cet intervalle. Au contraire, sur $\left]O, \dfrac{1}{2}\right[$, elle est bijective vers $]2(\ln(2)-3), +\infty[$, et en particulier s'annule une seule fois. Comme $f(x) - x = x^2 g(x)$, cette valeur d'annulation de g correspond bien à l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

2. (a) Toujours en utilisant la croissance comparée, $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{4}$, on peut donc prolonger la fonction par continuité en posant $f(0) = \frac{1}{4}$.

(b) Le plus simple est de passer directement par le taux d'accroissement : $\tau_0(h) = \frac{f(h) - \frac{1}{4}}{h} = \frac{-1 - 2h\ln(h)}{4}$, qui a pour limite $-\frac{1}{4}$ en 0, ce qui assure que la fonction f est prolongeable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{4}$. L'équation de la tangente à la courbe en 0 est donc $y = f'(0)x + f(0) = \frac{1}{4}(1 - x)$.

(c) Il faudra bien calculer la dérivée de f un jour ou l'autre : $f'(x) = -\frac{1}{4} - x\ln(x) - \frac{x}{2}$ (on retrouve aisément la valeur de $f'(0)$ à l'aide du prolongement de la dérivée si on le souhaite). Le taux d'accroissement de f' en 0 est $\tau_0'(h) = \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = -\ln(h) - \frac{1}{2}$. Cette fois-ci, la limite étant infinie, la fonction f' n'est pas dérivable en 0. La courbe de f' admet en 0 une tangente verticale, mais on s'en fout complètement.

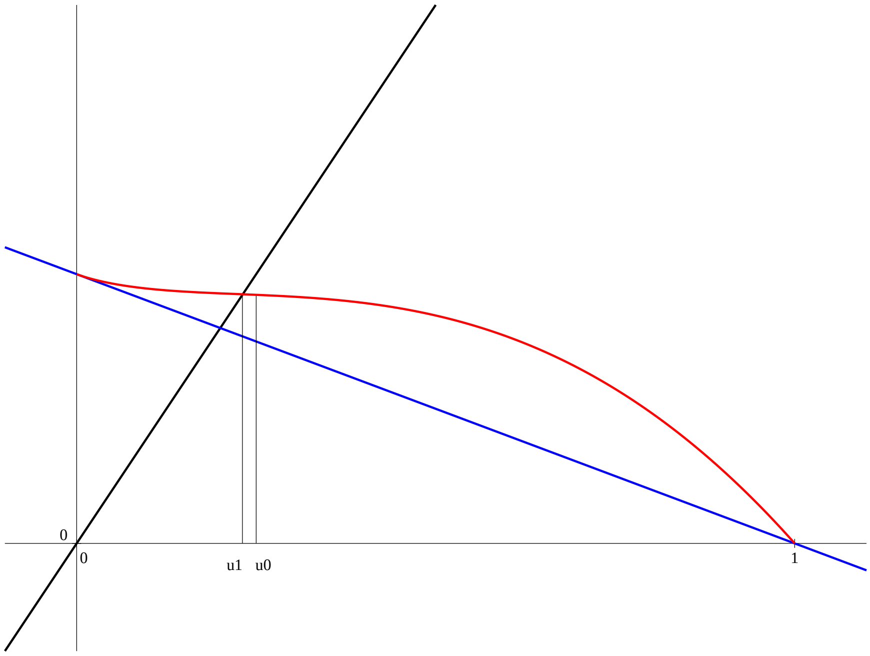
(d) Le signe de f' n'étant pas franchement évident, dérivons une deuxième fois : $f''(x) = -\ln(x) - 1 - \frac{1}{2} = -\ln(x) - \frac{3}{2}$. Cette dérivée s'annule sur $[0,1]$, pour $x = e^{-\frac{3}{2}}$. Le maximum correspondant de f' a pour valeur $f'(e^{-\frac{3}{2}}) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}} = e^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}$. Ah, il serait bon de savoir si ce nombre est positif ou pas. Pour cela comparons leurs logarithmes : $\ln(e^{-\frac{3}{2}}) - \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{2} + 2\ln(2) < 0$ (mais si, quand même, on sait ce que vaut $\ln(2)$ depuis le temps). Autrement dit, $e^{-\dfrac{3}{2}} < \frac{1}{4}$ (l'exponentielle étant croissante), et $f'(e^{-\frac{3}{2}}) < 0$. On peut donc dresser le tableau suivant :

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		1
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f'	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	< 0	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$
f	$\frac{1}{4}$	$\searrow$		$\searrow$	0

La fonction f' ne prend que des valeurs strictement négatives, et admet pour minimum sur $[0,1]$ la valeur $-\frac{3}{4}$, donc on peut bien affirmer que $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$ sur cet intervalle.

(e) La fonction f étant décroissante, et vérifiant $f(1) = 0$ et $f(0) = \frac{1}{4} < 1$, c'est en effet le cas.

(f) On peut se contenter de faire la courbe sur $[0,1]$, en prenant bien sûr une unité suffisamment grande.



3. (a) C'est une récurrence triviale puisque l'intervalle est stable par f : $u_0 \in [0,1]$, et si u_n est dans l'intervalle, alors $f(u_n) = u_{n+1}$ aussi.

   (b) Cette question est en fait complètement stupide : α est très proche de $\frac{1}{4}$, ce qui fait qu'on ne voit rien sur le graphique (d'ailleurs je me suis arrêté à u_1). En tout cas, la suite ne devrait pas être monotone quand f est décroissante.

   (c) Dans un premier temps, on va appliquer l'IAF entre u_n et α, qui appartiennent tous les deux à l'intervalle $[0,1]$. Comme on a majoré $|f'|$ par $\frac{3}{4}$ sur cet intervalle, on peut écrire $|f(u_n)-f(\alpha)| \leq \frac{3}{4}|u_n-\alpha|$, soit $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{3}{4}|u_n-\alpha|$. On peut alors prouver la majoration de l'énoncé par récurrence. Au rang 0, on sait que $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, donc $\left|\alpha - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{1}{4}$ (ce qui est nettement mieux que ce qui est demandé). Supposons l'inégalité vraie au rang n, alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$ (d'après l'IAF), et donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$ en appliquant l'hypothèse de récurrence. La propriété est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n.

   (d) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 0$, on peut appliquer le théorème des gendarmes pour conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

   (e) Il faut avoir $\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \leq 10^{-3}$, soit en passant au logarithme $(n+1)(\ln(3) - \ln(4)) \leq -3\ln(10)$, et donc $n \geq \frac{3\ln(10)}{2\ln(2) - \ln(3)} - 1$ (attention au changement de sens, on divise par un nombre négatif). Bon, pour une valeur explicite, il faut au moins des valeurs approchées des ln. On sait bien que $2\ln(2) - \ln(3) \simeq 2\times 0.7 - 1.1 \simeq 0.3$. Pour le numérateur, $\ln(10) = \ln(2)+\ln(5)$, avec $2\ln(2) < \ln(5) < \ln(2)+\ln(3)$, donc $1.4 < \ln(5) < 1.8$. Prenons raisonnablement $\ln(5) \simeq 1.6$ pour obtenir $3\ln(10) \simeq 6.9$. Oh, ça donne une valeur sympa, puisque $\frac{6.9}{0.3} = \frac{69}{3} = 23$, ce qui donne $n > 22$. On aura donc notre valeur approchée à partir de $n = 23$.

Problème

1. Allons-y dans la joie et la bonne humeur :
   - si f est impaire, $I(f) = 0$ (intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0), et $S(f) = \dfrac{-f(1) + 4f(0) + f(1)}{3} = 0$. Au moins un cas où la méthode est efficace !
   - si $f(t) = t^4$, $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^4\,dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$, alors que $S(f) = \dfrac{1+0+1}{3} = \dfrac{2}{3}$. C'est clairement moins précis.
   - si $f(t) = \dfrac{1}{t+2}$, $I(f) = [\ln(t+2)]_{-1}^{1} = \ln(3) \simeq 1.1$, et $S(f) = \dfrac{1 + 4 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{3} = \dfrac{10}{9}$, ce qui est très proche de $\ln(3)$.
   - si $f(t) = \dfrac{1}{t^2+2t+3}$, $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(t+1)^2+2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2}}(t+1))^2+1}\,dt$ $= \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan(t+1)\right]_{-1}^{1} = \dfrac{\arctan(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \simeq 0.68$ (oui, à la calculatrice, ce n'est pas une valeur remarquable) ; et $S(f) = \dfrac{\frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5}}{3} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{15+40+6}{90} = \dfrac{61}{90} \simeq 0.68$. Pas mal, cette méthode, quand même.
2. Pour $f(x) = x$ et $f(x) = x^3$, l'égalité découle de l'imparité de ces deux fonctions. Lorsque $f(x) = 1$, on a simplement $I(f) = 2$ et $S(f) = \dfrac{6}{3} = 2$, ça marche aussi. Enfin, pour $f(x) = x^2$, $I(f) = \dfrac{2}{3}$, et $S(f) = \dfrac{2}{3}$, il y a toujours égalité. L'égalité restera vraie pour tout polynôme de degré 3 par linéarité de l'intégrale et du calcul de $S(f)$: si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, alors $S(f) = aS(x^3) + bS(x^2) + cS(x) + dS(1)$ (c'est évident), et de même pour $I(f)$.
3. Posons donc $P_f = aX^3 + bX^2 + cX + d$, et écrivons les quatre conditions demandées : $P_f(-1) = -a+b-c+d$, donc $-a+b-c+d = f(-1)$; puis $f(0) = P_f(0) = d$; $f(1) = P_f(1) = a+b+c+d$; et enfin $f'(0) = P_f'(0) = c$ (puisque $P_f' = 3aX^2 + 2bX + c$). Le système a effectivement une solution (unique) et se résout très facilement : $d = f(0)$, $c = f'(0)$, puis $a+b = f(1) - f(0) - f'(0)$ et $b - a = f(-1) - f(0) + f'(0)$. En faisant la somme et la différence (et en divisant par deux), on a donc $b = \dfrac{f(-1)+f(1)}{2} - f(0)$, et $a = \dfrac{f(1)-f(-1)}{2} - f'(0)$.
4. (a) On calcule $h'(x) = f'(x) - P_f'(x) - 2kx(x^2-1) - 2kx^3$. Comme $f'(0) = P_f'(0)$ par définition, et que le reste de la dérivée s'annule en 0, on a bien $h'(0) = 0$.

   (b) Il y en a pas moins de quatre : $h(\alpha) = 0$, c'est dit dans l'énoncé, mais aussi $h(-1) = h(0) = h(1) = 0$ puisque ces trois valeurs annulent $x^2(x^2-1)$, et vérifient par hypothèse $P_f(x) = f(x)$.

   (c) Appliquons donc intelligemment (ou pas en fait) le théorème de Rolle sur chacun des trois intervalles $[-1, 0]$, $[0, \alpha]$ et $[\alpha, 1]$. Sur chaque intervalle, la fonction h est continue et prend la même valeur aux bornes (en l'occurrence 0), donc il existe trois réels $\beta \in]-1, 0[$, $\gamma \in]0, \alpha[$ et $\delta \in]\alpha, 1[$ tels que $h'(\beta) = h'(\gamma) = h'(\delta) = 0$. On ajoute la valeur α qui est distincte des trois autres, et on a bien quatre valeurs d'annulation distinctes pour h' dans $]-1, 1[$.

   (d) Appliquons donc désormais le théorème de Rolle à la fonction h' (qui est continue) sur les intervalles $[\beta, \gamma]$, $[\gamma, \alpha]$ et $[\alpha, \delta]$ pour trouver trois valeurs distinctes ε, ζ et η annulant h'. Devinez quoi ? On va appliquer ce bon vieux théorème de Rolle à la fonction h'' sur les intervalles $[\varepsilon, \zeta]$ et $[\zeta, \eta]$ pour trouver deux valeurs d'annulation distinctes de h''', qu'on appellera bien entendu θ et ι (bonne révision de l'alphabet grec). Un dernier coup de Rolle pour la route, appliqué à h''' sur l'intervalle $[\theta, \iota]$, et nous voila avec une valeur d'annulation κ de $h^{(4)}$. Ah mince, l'énoncé l'appelle β, on va quand même le respecter. Reste à regarder ce qui se passe quand on dérive quatre fois la fonction h : P_f étant un polynôme de degré 3, sa dérivée quatrième est nulle, et $kx^2(x^2-1) = kx^4 - kx^2$ a pour dérivée quatrième $4!k$, donc $h^{(4)}(x) = f^{(4)}(x) - 4!k$. Appliquée pour $x = \beta$, cette relation nous donne $0 = f^{(4)}(\beta) - 4!k$, soit $k = \dfrac{f^{(4)}}{4!}$.

(e) Il suffit de se rappeler que $h(\alpha) = 0$ pour écrire $f(\alpha) - P_f(\alpha) = k\alpha^2(\alpha^2 - 1)$, et en déduire la majoration demandée ($f^{(4)}(\beta)$ étant par définition inférieur à M_4).

5. On vient de prouver que c'était vrai pour tout $\alpha \in]0,1[$. Il reste à constater que ça le reste pour $t = 0$ et $t = 1$ de façon triviale puisque dans ce cas le membre de gauche vaut 0 (et celui de droite aussi d'ailleurs).

6. Par définition, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\ dt = I(f)$. En reprenant les notations de la question 3, $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_f(t)\ dt = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx\right]_{-1}^{1} = \frac{2b}{3} + 2d = \frac{f(-1)+f(1)}{3} - \frac{2f(0)}{3} + 2f(0) = \frac{f(-1)+4f(0)+f(1)}{3} = S(f)$ (incroyable, non ?). On peut donc écrire $\displaystyle |I(f) - S(f)| = \left|\int_{-1}^{1} f(t) - P_f(t)\ dt\right| \leq \int_{-1}^{1} |f(t) - P_f(t)|\ dt \leq \int_{-1}^{1} \frac{M_4}{4!} t^2(1-t^2)\ dt = \frac{M_4}{24}\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{M_4}{24}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) = \frac{M_4}{4!} \times \frac{4}{15} = \frac{M_4}{90}$.

7. On a fait les calculs plus haut : dans ce cas, $|I(f) - S(f)| = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{15}$. Or, on a dans ce cas $f^{(4)}(t) = 24$, donc $\dfrac{M_4}{90} = \dfrac{24}{90} = \dfrac{4}{15}$. On ne peut donc pas faire mieux comme majoration.