Devoir Surveillé n°6

PTSI B Lycée Eiffel

21 mars 2015

Exercice 1

On note dans tout cet exercice $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1. Déterminer un polynôme $P_1 \in E$ vérifiant les trois conditions suivantes : $P_1(1) = 1$, $P_1(3) = 0$ et $P_1(5) = 0$ (méthode au choix, on n'est pas obligé d'utiliser les polynômes de Lagrange).
2. Déterminer de même un polynôme P_3 vérifiant $P_3(1) = P_3(5) = 0$ et $P_3(3) = 1$, ainsi qu'un polynôme P_5 tel que $P_5(1) = P_5(3) = 0$ et $P_5(5) = 1$.
3. Démontrer que la famille (P_1, P_3, P_5) est une famille libre dans E.
4. Expliquer, si possible sans refaire de calculs, pourquoi cette famille est en fait une base de E.
5. Déterminer les coordonnées du polynôme $Q = X^2 - 3X - 1$ dans cette base.
6. Calculer $Q(1)$, $Q(3)$ et $Q(5)$, les résultats sont-ils cohérents avec ce que vous avez obtenu à la question précédente ?
7. On note désormais $P_0 = (X-1)(X-3)(X-5)$ et, pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{R}[X]$, on note $f(P)$ le reste de la division euclidienne de P par P_0.
   (a) Calculer $f(X^5)$.
   (b) Expliquer pourquoi $f(P)$ appartient toujours à E. L'application f est donc définie sur $\mathbb{R}[X]$ et à valeurs dans E.
   (c) Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ pour lesquels $f(P) = 0$ (aucun calcul nécessaire).
   (d) Démontrer que, $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = P(1)P_1 + P(3)P_3 + P(5)P_5$.

Exercice 2

On note dans cet exercice $f(x) = \dfrac{1 - x - 2x^2\ln(x)}{4}$, fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Étudier la fonction auxiliaire $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{5}{x} - 2\ln(x)$. En déduire que la fonction f admet un unique point fixe α, et que $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ (on pourra constater que $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$).
2. Étude de la fonction f.
   (a) Montrer qu'on peut prolonger par continuité la fonction f en 0.
   (b) Montrer que la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0, et donner l'équation de la tangente à sa courbe en 0.
   (c) La fonction prolongée est-elle deux fois dérivable en 0 ? Si oui, donner la valeur de $f''(0)$.
   (d) Étudier les variations de f et de f' sur $[0,1]$, et prouver en particulier que $\forall x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{3}{4}$.
   (e) Montrer que $[0,1]$ est un intervalle stable pour la fonction f.

   (f) Tracer une allure soignée de la courbe représentative de la fonction f (on fera figurer également la tangente en 0 et la droite d'équation $y = x$ sur le dessin).

3. Recherche d'une valeur approchée de α.

   On définit désormais la suite (u_n) par $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

   (b) Placer sur la graphique de la question 2.f les premiers termes de la suite (on s'arrêtera à u_3). La suite semble-t-elle monotone ?

   (c) Justifier rigoureusement que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}$.

   (d) En déduire la convergence et la limite de la suite (u_n).

   (e) Déterminer une valeur de n pour laquelle u_n est une valeur approchée à 10^{-3} près de α (on pourra se contenter de donner une valeur théorique sans faire l'application numérique, mais on aura un bonus si on donne une valeur de n explicite).

Problème

Le but de ce problème est d'étudier l'efficacité de la méthode de Simpson pour le calcul approché d'intégrales. Pour toute fonction f continue sur le segment $[-1, 1]$, on pose $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$, et $S(f) = \dfrac{f(-1) + 4f(0) + f(1)}{3}$ (ce qui correspond au calcul de la méthode de Simpson sans faire de découpage de l'intervalle en n morceaux).

1. Un peu de calcul pour débuter : calculer les valeurs de $I(f)$ et de $S(f)$ dans les cas suivants :
   - f est une fonction impaire.
   - $f(t) = t^4$.
   - $f(t) = \dfrac{1}{t+2}$.
   - $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + 2t + 3}$.
2. On continue avec du calcul : vérifier que $I(f) = S(f)$ si $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ ou $f(x) = x^3$ (on pourra utiliser certains des calculs précédents pour abréger dans certains cas). En déduire que l'égalité reste vraie pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
3. On revient au cas général et on suppose désormais que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[-1, 1]$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P_f \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P_f(-1) = f(-1)$, $P_f(0) = f(0)$, $P_f(1) = f(1)$ et $P_f'(0) = f'(0)$. Exprimer les coefficients de P_f en fonction de $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$ et $f'(0)$.
4. On considère un réel $\alpha \in]0, 1[$, et on pose $h(x) = f(x) - P_f(x) - kx^2(x^2 - 1)$, où k est une constante réelle fixée telle que $h(\alpha) = 0$.

   (a) Vérifier que $h'(0) = 0$.

   (b) Pour quelles valeurs de x peut-on affirmer que $h(x) = 0$?

   (c) Montrer que h' s'annule en quatre points distincts de l'intervalle $[-1, 1]$ (on pourra utiliser les questions précédentes et appliquer intelligemment le théorème de Rolle).

   (d) En déduire, à l'aide du théorème de Rolle, que $h^{(4)}$ s'annule en un certain point $\beta \in [-1, 1]$, et prouver que $k = \dfrac{f^{(4)}(\beta)}{4!}$.

   (e) Montrer que $|f(\alpha) - P_f(\alpha)| \leq \dfrac{M_4}{4!}\alpha^2(1 - \alpha^2)$, où M_4 est la valeur maximale prise par $|f^{(4)}|$ sur $[-1, 1]$.
5. Déduire du résultat précédent que, $\forall t \in [0, 1]$, $|f(t) - P_f(t)| \leq \dfrac{M_4}{4!}t^2(1 - t^2)$. On admet que le résultat reste vrai sur $[-1, 0]$.
6. En intégrant le résultat précédent, prouver que $|I(f) - S(f)| \leq \dfrac{M_4}{90}$.
7. Comparer $|I(f) - S(f)|$ avec $\dfrac{M_4}{90}$ dans le cas où $f(t) = t^4$. En déduire que la majoration précédente ne peut pas être améliorée.